ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ "SIMION STOILOW"

TEZĂ DE DOCTORAT

Aplicaţii ale dualităţii în unele probleme de optimizare infinit dimensionale

Coordonator ştiinţific
CS 1 Dr. Dan TIBA

Doctorand:
Diana Rodica MERLUŞCĂ

Bucureşti, 2014

Mulţumiri

În acest moment, recunoştiinţa mea se îndreaptă spre conducătorul meu de doctorat, domnul C.S. I Dr. Dan Tiba, pentru că mi-a oferit posibilitatea de a realiza teza de doctorat sub îndrumarea sa, pentru sprijinul acordat în pregătirea acestei teze, dar şi pentru răbdarea de care a dat dovadă în tot acest timp.

De asemenea, ţin să mulţumesc domnilor Prof. Dr. Viorel Arnăutu şi Prof. Dr. Cornel Marius Murea pentru îndrumările acordate şi pentru discuţiile constructive oferite în vederea realizării părţilor dedicate aplicaţiilor numerice. Doresc de asemnea să îi mulţumesc prietenului meu Dr. Razvan Iagar pentru discuţiile purtate şi schimbul de idei constructive.

Mulţumesc Institutului de Matematică "Simion Stoilow" pentru organizarea proiectului "Doctoratul în Ştiinţe fundamentale – Începutul unei cariere de vârf în cercetare", cofinanţat de Uniunea Europeană şi Guvernul României prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, contractul de finanţare nr. POSDRU/107/1.5/S/82514, în cadrul căruia a fost realizată această lucrare.

Mă simt îndatorată familiei şi prietenilor care mi-au fost alături şi m-au susţinut moral în această perioadă.

Cuprins

Introducere

Inegalităţile variaţionale reprezintă un subiect de interes în matematică, fizică şi informatică, având aplicaţii variate. De exemplu, problemele de ordinul doi sunt strâns legate de studiul suprafeţelor minime şi a capacităţii unei mulţimi în teoria potenţialului. Prin inegalităţi variaţionale se pot formula diverse probleme de echilibru din domenii ca mecanică, management sau economie (problema aflării timpului optimal de oprire pentru procese stocastice). Aplicaţiile includ studiul fluidelor în medii poroase, încălzirea controlată, fenomenul de schimbare a fazelor, probleme de contact în elasticitate, etc. (Brezis şi Stampacchia [32], Griesse şi Kunisch [71], Baiocchi [20], Duvaut şi Lions [50]). Inecuaţile de ordinul patru, în cazul problemei obstacolului, reprezintă probleme de deformare a plăcilor sau a barelor. Numeroase aplicaţii se întâlnesc în industria construcţiilor civile, precum clădiri cu structură metalică, poduri, căi ferate, industria contrucţiilor navale şi industria aerospaţială. (Love [96], Han, Benaroya şi Wei [121], Reddy [116]) În matematică, cu ajutorul inegalităţilor variaţionale se pot studia probleme de optimizare, sisteme de ecuaţii neliniare sau chiar probleme de punct fix.

Una din problemele care se formulează cu ajutorul inegalităţilor variaţionale este problema obstacolului. Rezolvarea problemei de obstacol înseamnă a rezolva, de fapt, o clasă de probleme de optimizare cu restricţii sau de probleme de frontieră liberă, aşa cum au remarcat Lewy şi Stampacchia [90].

În această lucrare prezentăm algoritmi bazaţi pe dualitate, de rezolvare a problemelor variaţionale asociate ecuaţiilor şi inecuaţiilor variaţionale eliptice. Menţionăm că rezultatele originale prezentate în Capitolul 2 au fost publicate în articolele Merluşcă [100], [101] şi [103], iar rezultatele originale din Capitolul 3 au fost publicate în Merluşcă [102]. Metodologia folosită dezvoltă idei introduse în Sprekels şi Tiba [128], Neittaanmaki, Sprekels şi Tiba [107].

În Capitolul 1 prezentăm rezultate şi tehnici cunoscute, utile pentru dezvoltarea algoritmilor.

În Capitolul 2 prezentăm problema de ordinul doi a obstacolului, cu modelarea matematică a acesteia, şi câteva rezultate preliminare necesare în teoria pe care o vom dezvolta ulterior. Secţiunea 2.2 tratează problema cu obstacol nul în spaţiile Banach $W^{1,p}$. Considerăm o problemă aproximativă şi calculăm cu ajutorul teoremei lui Fenchel problemele duale continuă şi aproximativă. Reiese că aceasta din urmă este o problemă finit dimensională având caracteristici potrivite pentru calcule numerice. În Secţiunea 2.4 abordăm problema obstacolului general şi o reducem la o problemă de obstacol nul, prin translaţie. Acest lucru ne permite să aplicăm algoritmul dezvoltat anterior oricărei probleme de obstacol de ordinul al doilea. Secţiunea 2.5 este dedicată implementării algoritmului şi testelor numerice. Testăm algoritmul prin comparaţie cu metoda elementului finit (programele `IPOPT` [137], `Freefrem++` v. 3.23 [76], `Matlab` [98]). Soluţiile obţinute sunt identice grafic, atât pentru obstacole nule, cât şi pentru obstacole generale.

Capitolul 3 tratează problema de obstacol pentru operatorul biharmonic. Prima secţiune, Secţiunea 3.1, este dedicată modelării matematice şi prezentării generale a rezultatelor preliminare necesare pentru aceste tipuri de probleme. În Secţiunea 3.2 dezvoltăm similar ca în Capitolul 2, metoda de rezolvare bazată pe dualitate, pentru un model simplificat al problemei plăcii a şezate. Diferenţele dintre cazul de ordin doi şi acesta apar în din cauza spaţiului dual, care, în acest caz nu mai este un spaţiu de distribuţii. Însă, şi în acest caz, am reuşit să dezvoltăm algoritmul, bazându-ne pe faptul că, în cazul plăcii aşezate, este valabil principiul de maxim. În Secţiunea 3.3, tratăm cazul plăcii încastrate arătând astfel că putem aplica un algoritm asemănător. Secţiunea 3.4 prezintăm aplicaţii numerice în dimensiune 1 şi 2 pentru problemele considerate pe parcusul capitolului 3 şi interpretarea datelor numerice obţinute. Observăm că valorile optime calculate ale funcţionalei energie sunt mai mici când este folosită metoda bazată pe dualitate, în comparaţie cu alte metode de rezolvare numerică (de exemplu, `IPOPT` [137], `Freefrem++` v. 3.23 [76]). Aceasta reprezintă un avantaj important al metodelor de dualitate.

Capitolul 1

Preliminarii matematice

1.1 Rezultate de analiză funcţională

Prezentăm câteva rezultate de analiză funcţională cunoscute, pe care le vom folosi în expunerea noastră. Amintim convergenţa slabă în spaţii Banach, aplicaţia de dualitate, conjugata unei funcţii convexe, subdiferenţiala, proprietăţile acestora, câteva rezultate utile legate de polara unei mulţimi. Folosim monografiile cunoscute Yosida [142], Barbu şi Precupanu [22], Brézis [30].

1.1.1 Convergenţe în topologia slabă

Fie X un spaţiu Banach cu norma $\|\cdot\|$. Notăm cu X^* dualul său şi notăm $(\cdot,\cdot)$ perechea de dualitate. Considerăm $f \in X^*$.

Notăm $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ funcţionalele liniare şi continue pe X definite prin $\varphi_f(x) = (f, x)$.

Definiţia 1.1. Topologia local convexă asociată familiei $\{\varphi_f\}_{f\in X^*}$ se numeşte topologia slabă pe X şi se notează cu $\sigma(X, X^*)$.

Această topologie este separată Hausdorff.

Enunţăm câteva proprietăţi ale şirurilor slab convergente.

Propoziţia 1.1. *Fie $\{x_n\}_n$ un şir în X.*

(i) *Dacă $x_n \to x$ în topologia tare, atunci $x_n \to x$ slab în $\sigma(X, X^*)$;*

(ii) *Dacă $x_n \to x$ slab în $\sigma(X, X^*)$, atunci $\{\|x_n\|\}_n$ este mărginită şi*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|;$$

(iii) *Dacă $x_n \to x$ slab în $\sigma(X, X^*)$ şi $f_n \to f$ tare în X^*, atunci $(f_n, x_n) \to (f, x)$.*

Includem aici şi o proprietate utilă a spaţiilor uniform convexe, de care ne vom folosi mai târziu

Propoziţia 1.2 (Propoziţia 3.32, pp.78, Brezis [30]). *Fie X este spaţiu Banach uniform convex şi $\{x_n\}_n \subset X$ un şir slab convergent la $x \in X$. Dacă*

$$\limsup\{\|x_n\|\} \leq \|x\|$$

atunci $x_n \to x$ tare în X.

Teorema 1.1 (Mazur). *Dacă $x_n \to x$ slab în $\sigma(X, X^*)$. Atunci $\forall \varepsilon > 0$ există n_ε şi o combinaţie convexă*

$$\sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \alpha_j x_j$$

cu $\alpha_j \geq 0$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n_\varepsilon} = 1$ astfel încât

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \alpha_j x_j \right\| < \varepsilon$$

Teorema 1.2. *Fie C este o mulţime convexă în X. Atunci C este închisă în topologia $\sigma(X, X^*)$ dacă şi numai dacă este tare închisă.*

Corolar 1.1. *Dacă $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ este o funcţie convexă şi semicontinuă inferior în topologia tare, atunci este semicontinuă inferior şi în $\sigma(X, X^*)$.*

Un alt rezultat foarte cunoscut şi pe care îl vom folosi în secţiunile viitoare este

Teorema 1.3 (Eberlein-Shmulyan). *Dacă X este spaţiu Banach reflexiv, atunci orice şir mărginit în X are un subşir slab convergent.*

1.1.2 Subdiferenţiala unei funcţii convexe

Fie un spaţiu Banach X şi dualul său X^*. Notăm cu $\|\cdot\|$ norma pe X şi cu $(\cdot, \cdot)$ dualitatea dintre X şi X^*.

Definiţia 1.2. Operatorul $J : X \to X^*$ definit prin

$$J(x) = \{x^* \in X^* : (x, x^*) = \|x^*\|^2 = \|x\|^2\}$$

se numeşte *aplicaţia de dualitate* pe X.

Propoziţia 1.3 (Propoziţia 2.14, pp. 38, Barbu şi Precupanu [22]). *Aplicaţia de dualitate pe un spaţiu Banach real X are următoarele proprietăţi*

(i) *este omogenă;*

(ii) *este aditivă dacă şi numai dacă X este spaţiu Hilbert;*

(iii) *este operator univoc dacă şi numai dacă X este neted (dacă şi numai dacă prin orice punct de frontieră al bilei unitate închise trece cel puţin un hiperplan închis de suport);*

(iv) *este surjectivă dacă şi numai dacă X este spaţiu reflexiv;*

(v) *este injectivă sau strict monotonă dacă şi numai dacă X este uniform convex (dacă şi numai dacă orice funcţională liniară şi continuă, diferită de funcţionala identic nulă, îşi atinge maximul pe bila unitate închisă).*

Teorema 1.4 (Teorema 2.7, pp. 38, Barbu şi Precupanu [22])**.** *Dacă X este un spaţiu reflexiv atunci există o normă echivalentă pe X pentru care X şi X^* sunt uniform convexe. Mai precis, X este şi neted şi uniform convex.*

Remarca 1.1. Într-un spaţiu Hilbert X, aplicaţia de dualitate este operator univoc şi bijectiv.

Definiţia 1.3. Pentru o funcţie convexă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, funcţia $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f^*(x^*) = \sup\{(x, x^*) - f(x) : x \in X\}, \quad \forall x^* \in X^*$$

se numeşte *conjugata convexă* a funcţiei f.

Remarca 1.2. Pentru o funcţie concavă $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, funcţia $g^\bullet : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$

$$g^\bullet(x^*) = \inf\{(x, x^*) - g(x) : x \in X\}, \quad \forall x^* \in X^*$$

se numeşte *conjugata concavă* a funcţiei g. Mai mult, aceasta se poate exprima folosind Definiţia 1.3 astfel

$$g^\bullet(x^*) = -(-g)^*(-x^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

Definiţia 1.4. Fie A un con cu vârful în O din X. Vom numi *polara* conului A, mulţimea

$$A^0 = \{x^* \in X^* : (x, x^*) \leq 0, \forall x \in A\}$$

Teorema 1.5 (Teorema bipolarei, Barbu şi Precupanu [22], pp.88)**.** *Bipolara unei mulţimi A din X este închiderea convexă a originii şi a lui A, adică*

$$A^{00} = \overline{conv(A \cup \{0\})}.$$

Vom nota prin $C(A, x_0)$ conul convex generat de mulţimea $A - x_0$, unde $x_0 \in X$.

Definiţia 1.5. Fie A o submulţime nevidă a lui X şi $x_0 \in A$. Mulţimea $TC(A; x_0)$ se numeşte *conul tangentelor* lui A şi este definită prin

$$TC(A; x_0) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \overline{C(A \cap V; x_0)},$$

unde $\mathcal{V}(x_0)$ este o bază de vecinătăţi pentru x_0.

Mulţimea $TC(A; x_0)$ este un con convex şi închis cu vârful în origine.

Definiţia 1.6. Fie A o submulţime nevidă a lui X şi $x_0 \in A$. Numim *conul pseudo-tangentelor* lui A mulţimea $PC(A; x_0)$ închiderea convexă a conului tangentelor lui A, adică

$$PC(A; x_0) = \overline{conv\, TC(A; x_0)}.$$

în general $TC(A;x_0) \subset C(A;x_0)$. Dacă A este con convex, atunci

$$TC(A;x_0) = PC(A;x_0) = \overline{C(A;x_0)}.$$

Definiţia 1.7. Fie $f : X \to (-\infty, \infty]$ o funcţie proprie şi convexă. Numim *subdiferenţiala* lui f aplicaţia $\partial f : X \to X^*$ definită prin

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(x) - f(u) \leq (x - u, x^*), \forall u \in X\}$$

Elementul $x^* \in \partial f(x)$ se numeşte *subgradient* al lui f în x.

Remarca 1.3. Mulţimea $\partial f(x)$ este închisă şi convexă în X^*.

Dacă f este funcţie proprie şi convexă pe X atunci minimul global al lui f pe X este atins în punctul $x \in X$ dacă şi numai dacă $0 \in \partial f(x)$.

Dacă f este semicontinuă inferior, subdiferenţiala ∂f^* coincide cu $(\partial f)^{-1}$.

Propoziţia 1.4 (Propoziţia 2.1, Barbu şi Precupanu [22], pp. 91)**.** *Fie $f : X \to (-\infty, \infty]$ o funcţie proprie şi convexă. Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii*

(i) $x^* \in \partial f(x)$;

(ii) $f(x) + f^*(x^*) \leq (x, x^*)$;

(iii) $f(x) + f^*(x^*) = (x, x^*)$.

Dacă, în plus, funcţia f este şi semicontinuă inferior, atunci fiecare din afirmaţiile de mai sus este echivalentă cu

(iv) $x \in \partial f^*(x^*)$.

Un alt rezultat important cu privire la subdiferenţiale este următorul

Teorema 1.6 (Teorema 2.1, Barbu şi Precupanu [22], pp. 96)**.** *Fie X un spaţiu Banach şi fie f o funcţie proprie, convexă şi semicontinuă inferior pe X. Atunci ∂f este operator maximal monoton de la X la X^*.*

Remarca 1.4. Subdiferenţiala funcţiei

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \forall x \in X$$

este aplicaţia de dualitate pe X.

1.2 Spaţii Sobolev

Această secţiune are ca scop fixarea notaţiilor cu care vom lucra şi trecerea în revistă a unor proprietăţi ale spaţiilor Sobolev pe care le vom folosi în celelalte capitole.

Pe lângă definiţiile spaţiilor vom prezenta, fără demonstraţii, teoreme de scufundare ale spaţiilor Sobolev şi câteva rezultate de urmă, conform cu Adams [2], Rodrigues [119] şi Grisvard [72].

Fie Ω un domeniu arbitrar în $\mathbb{R}^n$. Definim funcţionala $\|\cdot\|_{m,p}$, unde $m \in \mathbb{N}$ şi $1 \le p \le \infty$ prin

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \text{dacă } 1 \le p < \infty, \\ \|u\|_{m,\infty} &= \max_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_\infty, \end{aligned}$$

pentru orice u pentru care partea dreaptă are sens şi unde $\|\cdot\|_p$ este norma în $L^p(\Omega)$.

Notăm

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \le |\alpha| \le m\}$$

unde $D^\alpha u$ este derivata parţială în sens slab. Notaţia $W_0^{m,p}(\Omega)$ desemnează închiderea lui $C_0^\infty(\Omega)$ în $W^{m,p}(\Omega)$.

Aceste spaţii, împreună cu normele $\|\cdot\|_{m,p}$ corespunzătoare se numesc spaţii Sobolev pe Ω.

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, avem lanţul de incluziuni

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega).$$

Teorema 1.7 (Teorema 3.5, Adams [2])**.** *Spaţiul $W^{m,p}(\Omega)$ este separabil dacă $1 \le p < \infty$ şi este reflexiv şi uniform convex dacă $1 < p < \infty$. În particular, $W^{m,2}(\Omega)$ este spaţiu Hilbert cu produsul scalar*

$$(u, v) = \sum_{0\le|\alpha|\le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Pentru a defini corect spaţiul dual $(W^{m,p}(\Omega))^*$ introducem noi notaţii şi enunţăm, fără demonstraţie, câteva rezultate din Adams [2].

Definim

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

pentru orice funcţii u şi v pentru care partea dreaptă are sens. Considerăm, pentru $1 \le p \le \infty$, spaţiul produs

$$L_N^p = \prod_{j=1}^N L^p(\Omega)$$

cu norma

$$\|u; L^p_N\| = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_p^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty. \\ \max_{1\le j\le N} \|u_i\|_\infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Fie q conjugatul lui p, definit astfel

$$q = \begin{cases} \infty, & p = 1, \\ \frac{p}{p-1}, & 1 < p < \infty, \\ 1, & p = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.8 (Teorema 3.8, Adams [2]). *Fie $1 \le p < \infty$. Pentru orice $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ există $v \in L^q_N$ astfel încât scriindu-l pe v de forma $(v_\alpha)_{0\le|\alpha|\le m}$, avem că pentru orice $u \in W^{m,p}(\Omega)$*

$$L(u) = \sum_{0\le|\alpha|\le m} < D^\alpha u, v_\alpha > . \tag{1.1}$$

Mai mult,

$$\|L; (W^{m,p}(\Omega))^*\|] = \inf \|v; L^q_N\|$$

unde infimumul este luat după mulţimea tuturor $v \in L^q_N$ pentru care are sens (1.1).

Pentru $1 \le p < \infty$, orice element $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ este o extensie la $W^{m,p}(\Omega)$ a unei distribuţii $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Presupunem că L este dat de relaţia (1.1) pentru $v \in L^q_N$, definim T_{v_α} prin

$$T_{v_\alpha}(\phi) =< \phi, v_\alpha >, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m.$$

Atunci $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se defineşte ca

$$T = \sum_{0\le|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{v_\alpha}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.9 (Teorema 3.10, Adams [2]). *Fie $1 \le p < \infty$. Spaţiul $(W^{m,p}_0(\Omega))^*$ este izomorf izometric cu un spaţiu Banach al distribuţiilor $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ care satisfac (1.2) pentru $v \in L^q_N$, cu norma*

$$\|T\| = \inf \left\{\|v; L^q_N\| : v \text{ satisface } (1.2)\right\}.$$

Spaţiul Banach al distribuţiilor pe Ω la care se face referire în Teorema 1.9 se notează cu $W^{-m,q}(\Omega)$ şi este spaţiul dual al lui $W^{m,p}_0(\Omega)$.

Pentru $1 < p < \infty$. Orice $v \in L^q(\Omega)$ determină în $(W^{m,p}_0(\Omega))^*$ un element L_v definit prin

$$L_v(u) =< u, v > .$$

Cu ajutorul acestui fapt definim norma $(-m, q)$ a lui $v \in L^q(\Omega)$ ca

$$\|v\|_{-m,q} = \|L_v; (W^{m,p}_0(\Omega))^*\| = \sup\{| < u, v > | : u \in W^{m,p}_0(\Omega), \|u\|_{m,p} \le 1\}.$$

Este cunoscut şi faptul că $V = \{L_v : v \in L^q(\Omega)\}$ este un subspaţiu propriu şi dens al lui $(W_0^{m,p}(\Omega))^*$.

Remarca 1.5. Aplicaţia de dualitate pe $W^{m,2}(\Omega)$ este operator univoc, aditiv şi bijectiv, datorită Propoziţiei 1.3, Teoremei 1.7 şi Teoremei 1.9.

Fie Ω domeniu în $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea conului dată de un anumit con C şi considerăm X un spaţiu Banach de funcţii definite pe Ω. Prin afirmaţia că are loc scufundarea

$$W^{m,p}(\Omega) \to X$$

înţelegem că există o constantă de scufundare K pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$\|u; X\| \leq K\|u\|_{m,p}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Teorema 1.10 (Teorema de scufundare Sobolev, Teorema 5.4, Adams [2])**.** *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^n$ şi fie Ω^k un domeniu k-dimensional obţinut prin intersecţia lui Ω cu un hiperplan k-dimensional din $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$.*

Fie j şi m întregi nenegativi şi p, $1 \leq p < \infty$.

***Partea I**. Dacă Ω are proprietatea conului, atunci există următoarele scufundări:*

***Cazul A**. Pentru $mp < n$ şi $n - mp < k \leq n$, avem*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega^k), \quad p \leq q \leq \frac{kp}{n-mp} \tag{1.3}$$

şi, în particular,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq \frac{np}{n-mp} \tag{1.4}$$

sau

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}. \tag{1.5}$$

Mai mult, dacă $p = 1$, astfel încât $m < n$, scufundarea (1.3) există şi pentru $k = n - m$.

***Cazul B**. Pentru $mp = n$ şi pentru orice k, $1 \leq k \leq n$ avem*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega^k), \quad p \leq q < \infty \tag{1.6}$$

şi, în particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty. \tag{1.7}$$

Mai mult, dacă $p = 1$, astfel încât $m = n$, scufundările (1.6) şi (1.7) există şi pentru $q = \infty$. De fapt,

$$W^{j+n,1}(\Omega) \to C_B^j(\Omega). \tag{1.8}$$

***Cazul C**. Pentru $mp > n$ avem*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega). \tag{1.9}$$

Partea II. *Dacă Ω are proprietatea tare Lipschitz locală, atunci Cazul C de la Partea I poate fi rafinat astfel:*

Cazul C'. *Pentru $mp > n > (m-1)p$ avem*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}. \tag{1.10}$$

Cazul C". *Pentru $n = (m-1)p$ avem*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \lambda < 1. \tag{1.11}$$

De asemenea, dacă $n = m-1$ şi $p = 1$, atunci (1.11) este valabilă şi pentru $\lambda = 1$.

Partea III. *Toate concluziile părţilor I şi II sunt adevărate pentru Ω domeniu arbitrar dacă spaţiile W sunt înlocuite cu W_0 corespunzătoare.*

Constantele de scufundare pot fi alese în aşa fel încât să depindă de Ω prin dimensiunea n şi parametrii conului C invarianţi la transformările rigide ale lui C.

Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^n$ şi Ω_0 un subdomeniu al lui Ω. Fie $X(\Omega)$ un spaţiu în care se scufundă $W^{m,p}(\Omega)$. Deoarece operatorul de restricţie

$$i_{\Omega_0} : u \mapsto u|_{\Omega_0}$$

este mărginit de la $X(\Omega)$ la $X(\Omega_0)$, adică

$$\|i_{\Omega_0}(u) : X(\Omega_0)\| \leq \|u; X(\Omega)\|$$

orice scufundare de forma

$$W^{m,p}(\Omega) \to X(\Omega)$$

poate fi compusă cu restricţia i_{Ω_0}, rezultând scufundarea

$$W^{m,p}(\Omega) \to X(\Omega_0).$$

Fie două spaţii X şi Y astfel încât are loc scufundarea $X \to Y$. Prin scufundare compactă vom înţelege faptul că din orice şir mărginit $(u_n)_n$ din X putem extrage un subşir $(u'_n)_n$ convergent în Y.

Dacă Ω satisface ipotezele Teoremei 1.10, de scufundare Sobolev şi Ω_0 este mărginit, atunci, cu excepţia unor cazuri extreme, toate scufundările sunt compacte.

Teorema 1.11 (Teorema Rellich-Kondrachov, Teorema 6.2, Adams [2])**.** *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^n$, Ω_0 un subdomeniu al lui Ω şi Ω_0^k un domeniu k-dimensional obţinut prin intersecţia lui Ω_0 cu un hiperplan k-dimensional din $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq k \leq n$).*

Fie j şi m întregi cu $m \geq 1$ şi fie $1 \leq p < \infty$.

Partea I. *Dacă Ω are proprietatea conului şi $mp \leq n$, atunci următoarele scufundări sunt compacte:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0^k), \quad 0 < n - mp < k \leq n, 1 \leq q < \frac{kp}{n - mp} \tag{1.12}$$

şi

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0^k), \quad n = mp, 1 \leq k \leq n, 1 \leq q < \infty. \tag{1.13}$$

Partea II. *Dacă Ω are proprietatea conului şi $mp > n$, atunci următoarele scufundări sunt compacte:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega) \tag{1.14}$$

şi

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0^k), \quad 1 \leq q < \infty. \tag{1.15}$$

Partea III. *Dacă Ω are proprietatea tare Lipschitz locală, atunci avem scufundările compacte:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^j(\bar{\Omega}_0), \quad mp > n \tag{1.16}$$

şi

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad mp > n > (m-1)p, 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}. \tag{1.17}$$

Partea IV. *Pentru Ω domeniu arbitrar, toate scufundările* (1.12)-(1.17) *rămân compacte, dacă spaţiile W sunt înlocuite cu W_0 corespunzătoare.*

Remarca 1.6. Dacă spaţiile X, Y şi Z sunt spaţii pentru care avem scufundăriile $X \to Y$ şi $Y \to Z$, dintre care cel puţin una este compactă, atunci scufundarea $X \to Z$ este compactă.

Prezentăm în continuare câteva teoreme de urmă.

Teorema 1.12 (Teorema 5.6, pp. 74, Rodrigues [119])**.** *Fie Ω un domeniu de clasă $C^{0,1}$ şi $p \geq 1$. Pentru $m \in \{1, 2\}$ există o unică aplicaţie liniară şi continuă*

$$R : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m-1,q}(\partial\Omega)$$

astfel încât $Ru = u|_{\partial\Omega}$, dacă $u \in C^2(\bar{\Omega})$, unde $q \leq (np-p)/(n-p)$, dacă $1 \leq p < n$ sau $\forall q > 1$, dacă $p \geq n$. Mai mult,

$$R(u^+) = (Ru)^+ \text{dacă } m = 1; \quad R(\partial_i u) = \partial_i(Ru), \text{dacă } m = 2$$

aproape peste tot pe $\partial\Omega$, şi R este compact pentru $p > 1$, dacă $q < (np-p)/(n-p)$ şi $p < n$.

Teorema 1.13 (Teorema 1.5.1.1, pp. 37, Grisvard [72])**.** *Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită în $\mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{k,1}$. Presupunem că $s - 1/p$ nu este număr întreg, $s \leq k+1$, $s - 1/p = l + \sigma$, $\sigma \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}$. Atunci aplicaţia*

$$u \mapsto \left(\gamma u, \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}, \ldots, \gamma\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}\right)$$

defintă pentru $u \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$, *are ca extensie continuă şi unică un operator de la* $W^{s,p}(\Omega)$ *la*

$$\prod_{j=0}^{l} W^{s-j-1/p,p}(\partial\Omega)$$

Acest operator are un invers continuu la dreapta care nu depinde de p.

Operatorul definit în enunţul Teoremei 1.13 poartă numele de *operator de urmă.*

O ultimă teoremă de urmă foarte utilizată este următoarea

Teorema 1.14 (Corolar 1.5.1.6, pp. 39, Grisvard [72])**.** *Fie* Ω *o mulţime deschisă şi mărginită în* $\mathbb{R}^n$ *cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* $C^{k,1}$. *Presupunem că* $s - 1/p$ *nu este număr întreg,* $s \leq k+1$, $s - 1/p = l + \sigma$, $\sigma \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}$. *Atunci* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *dacă şi numai dacă* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *şi*

$$\gamma u = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} = \ldots = \gamma \frac{\partial^l u}{\partial \nu^l} = 0$$

1.3 Probleme de optimizare

Prezentăm, în această secţiune teoria clasică a problemelor de optimizare cu restricţii, conform Barbu şi Precupanu [22]. Definim funcţia Lagrange asociată problemei şi arătăm ca prin calcularea punctului şa al acesteia obţinem atât multiplicatorii lui Lagrange cât şi soluţia optimă a problemei de optimizare. Tot în acestă secţiune, enunţăm condiţiile de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker [88] care afirmă că deplasarea din punctul optimal pe orice direcţie admisibilă nu determină crşterea funcţionalei obiectiv. Aceste condiţii sunt folosite în numeroase metode de optimizare cu restricţii. De exemplu, pachetul de optimizare IPOPT [137] sau algoritmul lui Rosen (Arnăutu şi Neittaanmäki [12], pp. 44) foloseşte condiţiile Karush-Kuhn-Tucker pentru a obţine direcţii admisibile şi pentru a opri procesul de căutare la atingerea optimului.

Fie X un spaţiu liniar topologic separat Hausdorff şi $f : X \to \mathbf{R}$ o funcţie dată. Alegem mulţimea $A \subset X$ şi considerăm problema

$$\min\{f(x) : x \in A\} \tag{1.18}$$

Mulţimea A reprezintă restricţiile problemei (1.18). Spunem că elementul $x \in X$ este *admisibil* pentru problema (1.18) dacă $x \in A \cap D(f)$. În cazul în care există cel puţin un punct admisibil, problema (1.18) se numeşte *consistentă.*

Folosind funcţia indicatoare a mulţimii A, putem rescrie problema (1.18) ca o problema de minimizare în care nu apar restriţii explicite, şi anume

$$\min\{f(x) + I_A(x) : x \in X\}$$

Vom considera că f este proprie, convexă şi semicontinuă inferior pe X şi că mulţimea A este convexă şi închisă pe X.

Un element $x_0 \in X$ este soluţie optimă a problemei (1.18) dacă şi numai dacă

$$\partial f(x_0) \cap (-C^0(A; x_0)) \neq \emptyset \tag{1.19}$$

unde $C(A; x_0)$ reprezintă conul convex generat de $A - x_0$.

De obicei, mulţimea A este definită prin soluţiile unui număr finit de ecuaţii şi inecuaţii, asociate unor familii de funcţii definite pe X:

$$A = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n; r_j(x) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{1.20}$$

Asociem problemei (1.18) funcţia Lagrange

$$L(x, \lambda, \nu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j r_j(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^{n+1}, \nu \in \mathbb{R}^m$$

Enunţăm un prim rezultat de optimalitate, referitor la acest caz.

Teorema 1.15 (Teorema 1.1, pp. 154, Barbu şi Precupanu [22])**.** *Fie f o funcţie proprie şi convexă, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funcţii reale convexe şi $r_1, r_2, \ldots, r_m$ funcţii afine. Dacă x_0 este soluţie optimă pentru problema* (1.18) *în care A este definit ca în* (1.20)*, atunci există numerele reale $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$, $\nu_1^0, \ldots, \nu_m^0$, nu toate nule, astfel încât*

$$\lambda_0^0 f(x_0) \leq \lambda_0^0 f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j^0 r_j(x), \quad \forall x \in D(f)$$

cu următoarele proprietăţi

$$\lambda_0^0 \geq 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0, \quad \lambda_i^0 g_i(x_0) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Numerele λ_i^0, ν_j^0 se numesc *multiplicatorii lui Lagrange* ai problemei (1.18).

În plus, conform teoremei, $(\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0, \nu_1^0, \ldots, \nu_m^0)$ este punct şa pentru funcţia Lagrange. Deci, are loc relaţia

$$\lambda_0^0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j^0 r_j(x_0) \leq \lambda_0^0 f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j^0 r_j(x),$$

pentru $\forall (x, \lambda, \nu) \in D(f) \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m$.

Dacă $r_j = 0$, pentru orice $j = 1, 2, \ldots, m$, atunci

$$A = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1.21}$$

Teorema 1.16 (Teorema 1.2, pp. 157, Barbu şi Precupanu [21]). *Fie f o funcţie reală şi convexă şi fie $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funcţii reale convexe care satisfac condiţia*

$$\exists x \in D(f) \text{ astfel încât } g_i(x) < 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.22}$$

Atunci elementul x_0 este soluţie optimă pentru (1.18) *cu* (1.22) *dacă şi numai dacă există $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ astfel încât au loc proprietăţile*

$$f(x_0) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 g_i(x), \quad \forall x \in X \tag{1.23}$$

şi

$$\lambda_i^0 \geq 0, \quad \lambda_i^0 g_i(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Echivalent, (x_0, λ^0) este punct şa pentru funcţia Lagrange pe $X \times \mathbb{R}_+^n$, mai exact,

$$f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 g_i(x_0) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 g_i(x), \quad \forall (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}_+^n.$$

Condiţia (1.22) se numeţe *condiţia Slater* şi joacă un rol foarte important în teoria optimizării.

Rezultatul Teoremei 1.16 poate fi îmbunătăţit pe spaţiile liniare topologice. Se obţine astfel un rezultat clasic de optimizare, numit Teorema Karush-Kuhn-Tucker.

Teorema 1.17 (Karush-Kuhn-Tucker [88]). *Sub ipotezele Teoremei 1.16, dacă g_i sunt şi continue, atunci condiţia de optimalitate* (1.23) *este echivaletă cu*

$$0 \in \partial f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \partial g_i(x_0).$$

Se pot obţine rezultate de forma condiţiei Karush-Kuhn-Tucker şi într-un cadru mai general. În acest sens, considerăm două spaţii liniare normate X şi Y, A o submulţime convexă în X şi A_Y un con convex şi închis în Y care determină o relaţie de ordine pe Y, adică $y_1 \geq y_2$ dacă şi numai dacă $y_1 - y_2 \in A_Y$.

Considerăm problema de minimizare

$$\min\{f(x) : x \in A, G(x) \in A_Y\} \tag{1.24}$$

unde $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, convexă şi semicontinuă inferior cu $D(f) \supset A$ şi $G : X \to Y$ un operator convex.

În general, restricţiile date de egalităţi sunt incluse în mulţimea A, iar cele date de inegalităţi sunt exprimate folosind relaţia de ordine generată de conul A_Y.

În acest caz, condiţia Slater este

$$G(A) \cap int\ A_Y \neq \emptyset. \tag{1.25}$$

Asociem problemei (1.24) funcţia Lagrange

$$L(x, y^*) = f(x) + (G(x), y^*), \quad \forall (x, y^*) \in A \times A_Y^0$$

unde $A_Y^0 = \{y^* \in Y : (y, y^*) \leq 0, \forall y \in A_Y\}$ este conul polar al lui A_Y.

Enunţăm un rezultat de tip ”punct şa” pentru problema (1.24).

Teorema 1.18 (Teorema 1.4, pp. 160, Barbu şi Precupanu [22])**.** *Dacă* (1.24) *satisface condiţia* (1.25)*, atunci* $x_0 \in A$ *este soluţie optimă dacă şi numai dacă există* $y_0^* \in A_Y^0$ *astfel încât*

$$f(x_0) + (G(x_0), y^*) \leq f(x) + (G(x), y_0^*), \quad \forall (x, y^*) \in A \times A_Y^0,$$

adică (x_0, y_0^*) *este punct şa pentru funcţia* L*.*

Remarca 1.7. Obţinem ca o consecinţă directă a Teoremei 1.18 că punctul $(x_0, y_0^*) \in A \times A_Y^0$ este punct şa al lui L dacă şi numai dacă au loc condiţiile

$$f(x_0) \leq f(x) + (G(x), y_0^*), \quad \forall x \in A, \quad (G(x_0), y_0^*) = 0$$

Astfel, Teorema 1.17 este o consecinţă directă a Teoremei 1.18.

Teorema 1.19 (Teorema 1.6, pp. 166, Barbu şi Precupanu [22])**.** *Dacă* $int\ A_Y \neq \emptyset$*,* x_0 *este soluţie a problemei* (1.24) *şi* f *şi* G *sunt diferenţiabile Fréchet în* x_0*, atunci există un număr* η_0 *şi* $y_0^* \in Y^*$*, nenule amândouă, astfel încât*

$$\eta_0 f'_{x_0}(x) + y_0^*(G'_{x_0}(x)) \geq 0, \quad \forall x \in PC(A; x_0)$$

şi

$$\eta_0 \geq 0, \quad y_{x_0}^*(y) \leq 0, \quad \forall y \in A_Y, y_0^*(G(x_0)) = 0.$$

Condiţiile de optimalitate din enunţul Teoremei 1.19 constituie condiţii de tip Karush-Kuhn-Tucker pentru problema (1.24), iar elementul $y_0^* \in Y^*$ poate fi privit ca multiplicator al lui Lagrange pentru problema de optimizare (1.24).

1.4 Teoria dualităţii

În această secţiune prezentăm câteva noţiuni de teoria dualităţii pe care le vom folosi în capitolele viitoare. Această teorie constituie o tehnică extrem de utilă atât pentru obţinerea unor rezultate teoretice cât şi pentru dezvoltarea unor algoritmi de aproximare a soluţiilor problemelor care se pot exprima cu ajutorul inegalităţilor variaţionale. Putem cita monografii ca Barbu şi Precupanu [22], Ito şi Kunisch [80], Gill, Murray şi

Wright [67], Tremolieres, Lions şi Glowinski [133], Dostál [49] sau Zălinescu [143] care tratează dualitatea fie ca un subiect matematic aparte, fie ca o metodă de rezolvare. Mai mult, este des utilizată în lucrările recente tocmai datorită versatilităţii ei. Dintre acestea amintim Gabay şi Mercier [62], Azé [17], Sprekels şi Tiba [127], Lovíšek [97] şi Hintermüller şi Rösel [78].

Fie X şi Y două spaţii Banach reale şi considerăm X^* şi Y^* dualele lor. Notăm $(\cdot,\cdot)$ aplicaţiile de dualitate corespunzătoare. Putem obţine o dualitate între $X\times Y$ şi $X^*\times Y^*$ dată de

$$((x,y),(x^*,y^*)) = (x,x^*) + (y,y^*), \quad \forall (x,y)\in X\times Y, (x^*,y^*)\in X^*\times Y^*$$

Fie funcţionala $F : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât

$$F(x,0) = f(x), \forall x\in X.$$

Considerăm problema de minimizare

$$\min_{x\in X} f(x), \tag{P}$$

Notăm cu F^* conjugata funcţiei F în raport cu dualitatea $(X\times Y, X^*\times Y^*)$.

Problema de minimizare

$$\max_{y^*\in Y^*} \{-F^*(0,y^*)\} \tag{P^*}$$

se numeşte *problema duală* a lui (P).

Propoziţia 1.5 (Propoziţia 2.1, pp. 181, Barbu şi Precupanu [22]). *Între valorile problemelor* (P) *şi* (P^*) *există relaţia*

$$-\infty \le \sup(P^*) \le \inf(P) \le +\infty.$$

Analog, putem defini şi problema biduală

$$\min_{x\in X} F^{**}(x,0) \tag{P^{**}}$$

Cum $F^{***} = F$, dualele de grad mai mare ale lui (P) pot fi identificate cu (P^*) sau cu (P^{**}).

Definiţia 1.8. Problema (P) se numeşte *normală* dacă

$$-\infty \le \inf(P) = \sup(P^*) \le +\infty.$$

O altă abordare a dualităţii este cea prin intermediul teoremei lui Fenchel. În acest sens, fie $f : X \to (-\infty, +\infty]$ proprie, convexă şi semicontinuă inferior, $g : Y \to [-\infty, +\infty)$ proprie, concavă şi semicontinuă superior şi operatorul liniar şi continuu $A : X \to Y$.

Considerăm problema primală

$$\min_{x \in X} \{f(x) - g(Ax)\}, \tag{P_1}$$

Problema duală este

$$\min_{y^* \in Y^*} \{g^\bullet(y^*) - f^*(A^* y^*)\}, \tag{P_1^*}$$

unde A^* este operatorul adjunct al lui A, iar f^* şi $g^\bullet$ sunt conjugatele convexă şi, respectiv, concavă ale lui f şi, respectiv, g.

Teorema 1.20 (Teorema 2.4, pp. 188, Barbu şi Precupanu [22])**.** *Dacă există $x_0 \in X$ astfel încât $f(x_0) < +\infty$ şi g este continuă în Ax_0, problema (P_1) este stabilă, adică are loc egalitatea*

$$\inf\{f(x) - g(Ax) : x \in X\} = \max\{g^\bullet(y^*) - f^*(A^* y^*) : y^* \in Y^*\}. \tag{1.26}$$

În plus, avem echivalenţa proprietăţilor

(i) $(x_0, y_0^*) \in X \times Y^*$ *este un cuplu de soluţii pentru (P_1) şi (P_1^*);*

(ii) $x_0 \in X$ *şi* $y_0^* \in Y^*$ *verifică sistemul*

$$0 \in \partial f(x_0) - A^* y_0^*, \quad 0 \in y_0^* - \partial g(Ax_0)$$

Enunţăm acum Teorema de dualitate a lui Fenchel, luând $X = Y$ în Teorema 1.20 şi A operatorul identitate.

Teorema 1.21 (Teorema 2.5, pp. 189, Barbu şi Precupanu [22])**.** *Fie f şi $-g$ două funcţii proprii şi convexe pe X. Dacă există un element $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ astfel încât f sau g este continuă în x_0, atunci are loc egalitatea*

$$\inf\{f(x) - g(x) : x \in X\} = \max\{g^\bullet(x^*) - f^*(x^*) : x^* \in X^*\}. \tag{1.27}$$

De-a lungul timpului au fost formulate mai multe versiuni ale Teoremei lui Fenchel. O consecinţă imediată a versiunii lui Rockafellar [117] este

Teorema 1.22. *Pe un spaţiu normat X considerăm funcţiile $f : X \to (-\infty, +\infty]$ proprie şi convexă şi $g : X \to \mathbb{R}$ convexă şi continuă. Presupunem că există $\lambda \geq 0$ astfel încât $f + g \geq \lambda$ pe X. Atunci există $x^* \in X^*$ astfel încât*

$$f^*(x^*) + g^*(-x^*) \geq -\lambda.$$

Considerăm $g : X \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \forall x \in X.$$

Atunci, conform Teoremei 1.22, dacă o funcţie $f : X \to (-\infty, +\infty]$ proprie şi convexă are proprietatea că

$$f(x) + \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq 0, \quad \forall x \in X$$

există $x^* \in X^*$ astfel încât

$$f^*(x^*) + \frac{1}{2}\|x^*\|^2 \leq 0. \tag{1.28}$$

Notăm

$$M = \sup_{x \in X} \left[\|x\| - \sqrt{2f(x) + \|x\|^2}\right]^+$$

În aceste condiţii avem următorul rezultat

Teorema 1.23 (Torema 2.1, pp. 5, Simons şi Zălinescu [125])**.** *Cu notaţiile de mai sus, dacă* $x^* \in X^*$ *şi satisface* (1.28) *atunci* $\|x^*\| = M$ *şi*

$$M \leq \inf_{x \in X} \left[\|x\| + \sqrt{2f(x) + \|x\|^2}\right].$$

Pentru o funcţie $f : X \to (-\infty, +\infty]$, notăm

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

Enunţăm acum versiunea Attouch-Brezis a Teoremei lui Fenchel pentru spaţii nereflexive.

Teorema 1.24 (Corolar 2.3, pp. 131-132, Attouch şi Brezis [14])**.** *Fie* X *un spaţiu Banach şi* $f, g : X \to (-\infty, +\infty]$ *două funcţii convexe şi semicontinue inferior astfel încât*

$$\bigcup_{\lambda > 0} \lambda[\text{dom } f - \text{dom } g]$$

este un subspaţiu închis în X *şi*

$$f + g \geq 0, \quad \text{pe } X.$$

Atunci există $z^* \in X^*$ *astfel încât*

$$f^*(-z^*) + g^*(z^*) \leq 0.$$

Se poate obţine o generalizare a acestui rezultat, pe spaţii produs $X \times Y$. Enunţăm această generalizare obţinută de Simons şi Zălinescu [125].

Teorema 1.25. *Fie* $\sigma, \tau : X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ *două funcţii proprii, convexe şi semicontinue inferior şi*

$$\rho(x, y) = \inf\{\sigma(x, u) + \tau(x, v) : u, v \in Y, u + v = y\} > -\infty.$$

Definim $pr_1(x, y) = x$ *şi fie*

$$L = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda[pr_1 \text{dom } \sigma - pr_1 \text{dom } \tau]$$

un subspaţiu închis al lui X. Atunci

$$\rho^*(x^*, y^*) = \min\{\sigma^*(s^*, y^*) + \tau^*(t^*, y^*) : s^*, t^* \in X^*, s^* + t^* = y^*\}.$$

Remarca 1.8. Aplicând Teorema 1.25 pentru $Y = \{0\}$, $\sigma(x, 0) = f(x)$ şi $\tau(x, 0) = g(x)$, pentru orice $x \in X$ şi $(x^*, y^*) = (0, 0) \in X^* \times Y^*$, obţinem rezultatul Teoremei 1.24.

1.5 Ecuaţii şi inecuaţii variaţionale

Dedicăm această secţiune ecuaţiilor variaţionale de ordinul doi şi patru, punând accent pe rezultatele de existenţă, unicitate (unde este cazul) şi regularitate a soluţiilor. Rezultatele prezentate sunt importante atât în studiul ecuaţiilor variaţionale cât şi pentru teoria pe care o vom dezvolta în viitoarele capitole. Pentru un studiu mai amănunţit al ecuaţiilor variaţionale indicăm Grisvard [72], Kesavan [84], Dauge [48], Agmon [5] şi Gazzola, Grunau şi Sweers [63].

Ecuaţii variaţionale de ordin doi

Considerăm Ω o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$. Fie operatorul A pe Ω tare eliptic de ordin doi. Impunem următoarele ipoteze

(i) frontiera $\partial\Omega$ este de clasă $C^{1,1}$,

(ii) operatorul A are forma divergentă:

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)$$

unde $a_{i,j} = a_{j,i} \in C^{0,1}(\Omega)$ şi există $\alpha > 0$ cu proprietatea că

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq -\alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Vom căuta soluţia $u \in H^1(\Omega)$ a ecuaţiei

$$Au + \lambda u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \lambda u = f \tag{1.29}$$

cu condiţii Dirichlet pe frontieră

$$u = 0, \quad \text{pe } \partial\Omega \tag{1.30}$$

sau cu condiţii Neumann pe frontieră

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\nu^i \frac{\partial u}{\partial x_i} = g, \quad \text{pe } \partial\Omega \tag{1.31}$$

Definim forma biliniară a pe $H_0^1(\Omega)$ prin

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \lambda \int_\Omega uv\, dx$$

şi forma liniară şi continuă

$$l(v) = \int_\Omega fv\, dx$$

Atunci problema

$$a(u,v) = l(v)$$

are soluţie unică în $H_0^1(\Omega)$. Mai exact,

Teorema 1.26 (Teorema 2.2.1.2, pp. 86, Grisvard [72], Teorema 2.5, Barbu [21])**.** *Dacă $\lambda > 0$, pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există o soluţie unică $u \in H^1(\Omega)$ a ecuaţiei*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \lambda \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.32}$$

cu condiţia la limită $\gamma u = 0$.

Un rezultat de existenţă a soluţiei pentru ecuaţii variaţionale de ordinul al doilea mai generale este prezentat în Kesavan [84], pp. 121–125.

Enunţăm rezultate de regularitate pentru soluţia problemei Dirichlet.

Fie $u \in H_0^1(\Omega)$ soluţia ecuaţiei (1.29) cu (1.30). Fie $\theta \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Funcţia $u_1 = \theta u$ verifică ecuaţia

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\partial_i u_1 \partial_j v + \lambda \int_\Omega u_1 v\, dx = \int_\Omega f_1 v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.33}$$

unde

$$f_1 = \theta f + \sum_{i,j=1}^{n} \{a_{ij}(\partial_i\theta)(\partial_j u) + \partial_i[a_{ij}(\partial_j\theta)u]\} \in L^2(\Omega)$$

Considerăm D o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi Φ un difeomorfism de clasă $C^{1,1}$ de la $\bar{D}$ la o vecinătate a suportului lui θ. Notăm $\Phi^{-1}(\Omega \cap \Phi(D)) = E$.

Considerăm, acum, $u_2 = u_1 \circ \Phi$. Avem că $u_2 \in H_0^1(E)$ şi fie $\Psi = \Phi^{-1}$. Obţinem

$$\sum_{k,l=1}^{n} \int_\Omega a_{kl}^* \partial_k u_2 \partial_l v\, dx + \lambda \int_\Omega |\nabla\Phi| u_2 v\, dx = \int_\Omega f_2 v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(E) \tag{1.34}$$

unde

$$a_{kl}^* = \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}(\partial_i \bar{\Psi}_k)(\partial_j \bar{\Psi}_l)] \circ \Phi |\nabla\Phi| \in C^{0,1}(E)$$

şi

$$f_2 = |\nabla\Phi| f \circ \Phi \in L^2(E).$$

Mai mult, a^*_{kl} este E-eliptică.

Lema 1.1 (Lema 2.2.2.1, pp.88, Grisvard [72]). *Sub ipotezele de mai sus,* $u_2 \in H^2(\Omega)$.

Cu ajutorul Lemei 1.1 se demonstrează rezultatul de regularitate:

Teorema 1.27 (Teorema 2.2.2.3, pp 90, Grisvard [72], Teorema 3.3.3, pp. 139, Kesavan [84]). *Dacă* $\lambda \geq 0$, *pentru* $f \in L^2(\Omega)$ *există o unică soluţie* $u \in H^2(\Omega)$ *a ecuaţiei* (1.32) *cu condiţia la limită* $\gamma u = 0$.

Mai mult, există o constantă $C > 0$ *(care depinde de* Ω*) astfle încât*

$$\|u\|_2 \leq C\|f\|_0$$

iar dacă Ω *este de clasă* C^{m+2} *şi* $f \in H^m(\Omega)$, *atunci* $u \in H^{m+2}(\Omega)$ *şi*

$$\|u\|_{m+2} \leq C\|f\|_m$$

În particular, dacă $m > n/2$, *atunci* $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Enunţăm şi principiul de maxim în sens slab, deoarece este util în argumentele viitoare.

Teorema 1.28 (Teorema 3.5.1, pp. 144, Kesavan [84]). *Considerăm* Ω *mulţime deschisă şi mărginită în* $\mathbb{R}^n$ *cu frontiera suficient de netedă. Fie* $f \in L^2(\Omega)$ *şi* $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *soluţia unică a ecuaţiei*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \lambda \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Au loc următoarele afirmaţii

(i) *Dacă* $f \geq 0$ *pe* Ω *şi* $u \geq 0$ *pe* $\partial\Omega$, *atunci* $u \geq 0$ *pe* Ω.

(ii) *Pentru* $\lambda \equiv 0$ *şi* $f \geq 0$, *obţinem*

$$u \geq \inf_{\partial\Omega} u, \quad \text{pe } \Omega$$

(iii) *în cazul în care* $f \equiv 0$ *şi* $\lambda \equiv 0$, *atunci*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} u, \quad \text{pe } \Omega$$

Remarca 1.9. Ipoteza $u \in C(\bar{\Omega})$ va fi satisfăcută de către soluţiile slabe doar în anumite condiţii. De pildă, pentru $\partial\Omega$ suficient de regulată şi pentru $f \in L^2(\Omega)$, conform regularităţii $u \in H^2(\Omega)$. Folosind teorema de scufundare Sobolev, obţinem că pentru $n \leq 3$, $u \in C(\bar{\Omega})$.

Definind forma liniară l pe $H^1(\Omega)$ prin

$$l(v) = \int_\Omega fv\, dx - \int_{\partial\Omega} g\, dx$$

putem enunţa rezultatul de existenţă şi unicitate pentru problema Neumann.

Teorema 1.29 (Teorema 2.2.1.3, pp. 86, Grisvard [72]). *Dacă $\lambda > 0$, pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ şi orice $g \in L^2(\Omega)$ există o soluţie unică $u \in H^1(\Omega)$ a ecuaţiei* (1.29)*, cu condiţia la limită* (1.31)*, scrisă în forma slabă*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \lambda \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx - \int_{\partial\Omega} g\, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{1.35}$$

Şi în cazul acesta se poate demonstra următorul rezultat de regularitate:

Teorema 1.30 (Teorema 2.2.2.5, pp 91, Grisvard [72]). *Dacă $\lambda > 0$, pentru $f \in L^2(\Omega)$ există o unică soluţie $u \in H^2(\Omega)$ a ecuaţiei* (1.29) *cu condiţia la limită $\gamma\partial u/\partial\nu_A = 0$.*

Ecuaţii variaţionale de ordin patru

Fie $f \in W^{k,p}(\Omega)$ cu $1 < p < +\infty$ şi $k \in \mathbb{N}$. Considerăm ecuaţia

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f, \quad \text{în } \Omega \\ \gamma u &= 0, \quad \text{pe } \partial\Omega \\ \gamma\tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{pe } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Considerăm spaţiul $H_0^2(\Omega)$ pe care definim forma biliniară

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v$$

Astfel definită, forma a este continuă pe $H_0^2(\Omega)$, conform inegalităţii Cauchy-Schwartz şi coercivă conform inegalităţii lui Poincaré.

Definim forma liniră pe $H_0^2(\Omega)$

$$l(v) = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Astfel obţinem forma slabă a ecuaţiei (1.36)

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{1.37}$$

Cu ajutorul lemei Lax-Milgram, obţinem următorul rezultat

Lema 1.2 (Lema 7.1.1, pp. 302, Grisvard [72]). *Pentru orice $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, există o unică soluţie $u \in H_0^2(\Omega)$ a ecuaţiei* (1.37).

Un alt tip de problemă la limită pentru ecuaţia biharmonică este aceea în care se impun condiţii Navier la limită

$$\begin{aligned} \Delta\Delta u = f, &\quad \text{pe } \Omega \\ u = \Delta u = 0, &\quad \text{pe } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Acestă ecuaţie este echivalentă cu sistemul de două ecuaţii de ordinul doi

$$\begin{array}{ll} \Delta u = z, & \text{pe } \Omega \\ u = 0, & \text{pe } \partial\Omega \end{array} ; \qquad \begin{array}{ll} \Delta z = f, & \text{pe } \Omega \\ z = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{array} \tag{1.38}$$

Remarca 1.10. Dacă $f \in L^2(\Omega)$, atunci $z \in H^2(\Omega)$, ceea ce implică faptul că $u \in H^4(\Omega)$ (conform Teoremei 1.27).

În cazul operatorilor de ordin patru mai generali chiar şi problema existenţei soluţiei devine dificilă. Amintim lucrările Pei [110], Gazzola, Grunau şi Squassina [64] şi Ayed şi Mehdi [16] pentru rezultate în această direcţie.

Ecuaţia neomogenă biharmonică cu condiţii Neumann la limită, în bila unitate Ω din $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ll} \Delta^2 u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_1(s), \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \nu} = \varphi_2(s) & s \in \partial\Omega. \end{array} \tag{1.39}$$

este studiată în Karachik, Turmetov and Bekaeva [82],Turmetov şi Ashurov [136] sau Karachik şi Abdoulaev [81], unde se găsesc condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa soluţiei.

În Schmidt şi Khoromskij [123] se analizează ecuaţii biharmonice cu condiţii Dirichlet la limită şi se obţin ecuaţii integrale pe frontieră echivalente cu formularea variaţională a problemei iniţiale. Aminitim, de asemenea, articolul lui Begehr [24] în care sunt rezolvate ecuaţiile biharmonice neomogene în discul unitate din spaţiul complex, precum şi articolul lui Behrens şi Guzmán [25] care dezvoltă o metodă de rezolvare a acestei ecuaţii reformulând-o ca un sistem de patru ecuaţii cuplate de ordinul întâi.

1.5.1 Inecuaţii variaţionale

Expresia *inegalităţi variaţionale* a devenit populară după apariţia lucrării fundamentale a lui Lions şi Stampaccia [93], dar a fost introdus de către Hartmann şi Stampacchia [74] ca o metodă de a studia ecuaţiile cu derivate parţiale ce au aplicaţii în mecanică. Pe lângă numeroasele aplicaţii în economie, trasporturi şi inginerie, acestea sunt folosite în matematică pentru studiul sistemelor de ecuaţii neliniare sau problemelor de optimizare, printre altele. Câteva monografii care tratează acest subiect îi aparţin lui Ockendon şi Elliot [51], Friedman [61], Troianiello [134] şi lui Odden şi Reddy [109]. Şi Rodrigues [119] cuprinde o expunere amănunţită asupra inegalităţilor variaţionale, ele fiind folosite în studiul problemelor de obstacol.

În această secţiune considerăm spaţiul Hilbert V, cu norma $\|\cdot\|$, şi V' dualul său. Fie $f \in V'$. Prin notaţia $(\cdot,\cdot)$ înţelegem produsul scalar din V.

Considerăm o formă biliniară şi continuă $a : V \times V \to \mathbb{R}$ pentru care există o constanta $c > 0$ astfel încât

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

şi există o constană $\alpha > 0$ astfel încât

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in V. \tag{1.40}$$

Fie $j : V \to (-\infty, +\infty]$ convexă, proprie şi semicontinuă inferior.

Vom folosi în cele ce urmează următorul rezultat

Propoziţia 1.6 (Sofonea şi Matei [126])**.** *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $a : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, simetrică, V-eliptică şi continuă. Atunci funcţia $v \to a(v, v)$ este convexă şi semicontinuă inferior.*

Definim pe V funcţionala

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + j(v).$$

Considerăm problema de minimizare

$$\min_{v \in V} J(v). \tag{1.41}$$

echivalentă problema abstractă: Găsiţi $u \in V$ astfel încât

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in V. \tag{1.42}$$

Avem următorul rezultat:

Teorema 1.31 (Teorema 3.1, pp. 44, Sofonea şi Matei [126])**.** *Fie V spaţiu Hilbert. Problema* (1.42) *admite soluţie unică şi aceasta depinde Lispchitz continuu de $f \in V'$.*

În demonstaţia acestei teoreme, pe care o prezentăm deoarece este foarte importantă şi va fi des folosită în capitolele viitoare, vom avea nevoie de următoarea lemă.

Lema 1.3. *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ convexă, proprie şi semicontinuă inferior. Atunci φ este mărginită inferior de o funcţie afină, mai exact există $w \in V$ şi $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi(v) \geq < w, v > +\beta$, pentru orice $v \in V$.*

Demonstraţie. Teorema 1.31. Vom demonstra întâi existenţa soluţiei problemei (1.42). Considerăm

$$l = \inf_{v \in V} J(v)$$

Deoarece $j : V \to (-\infty, +\infty]$ este funcţie proprie, deducem că $J : V \to (-\infty, +\infty]$ este, de asemenea, funcţie proprie. Atunci

$$l < +\infty \tag{1.43}$$

Considerăm $\{u_n\} \in V$ un şir minimizant pemtru problema (1.42), adică

$$J(u_n) \to l, \quad \text{pentru } n \to +\infty. \tag{1.44}$$

Conform Lemei 1.3, există $w \in V$ şi $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$j(u_n) \geq < w, u_n > +\beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Folosind (1.40), obţinem

$$J(u_n) \geq \frac{\alpha}{2}\|u_n\|_V^2 - \|w\|_V\|u_n\|_V - \|f\|_{V'}\|u_n\|_V + \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.45}$$

Atunci şirul $\{u_n\}$ este mărginit în V. Folosind Teorema Eberlein-Shmulyan (Teorema 1.3, Secţiunea 1.1.1), obţinem existenţa elementului $u \in V$ cu proprietatea că $u_n \to u$ slab în V, pe un subşir.

Conform Propoziţiei 1.6, J este semicontinuă inferior pe V, deci

$$\liminf J(u_n) \geq J(u)$$

De aici şi din (1.44), deducem că $l \geq J(u)$. Dar cum l este valoarea minimă a lui J, avem de fapt că $J(u) = l$. Atunci u este soluţie a problemei (1.41), echivalentă cu (1.42).

Pentru a demonstra unicitatea soluţiei, presupunem că există $u_1, u_2 \in V$, cu $u_1 \neq u_2$, care verifică (1.42). Atunci

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) - \frac{1}{2}J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}a(u_1-u_2, u_1-u_2) + \frac{1}{2}j(u_1) + \frac{1}{2}j(u_2) - j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Folosind (1.40) şi convexitatea lui j, obţinem că

$$\min_{v \in V} J(v) = \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) > J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)$$

ceea ce este o contradiţie. Atunci presupunerea făcută este falsă, deci $u_1 = u_2$.

Demonstrăm acum dependenţa Lipschitz continuă a soluţiei faţă de f. Presupunem că u_1 şi u_2 sunt soluţiile problemei (1.42) pentru f_1 şi f_2 din V'. Atunci $j(u_1) < \infty$ şi $j(u_2) < \infty$. Mai mult, ecuaţiile variaţionale sunt verificate:

$$\begin{aligned} a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) &\geq (f_1, v-u_1), \quad \forall v \in V, \\ a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) &\geq (f_2, v-u_2), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Luăm în prima ecuaţie $v = u_2$ şi în a doua $v = u_1$. Adunând, obţinem

$$a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq (f_1-f_2, u_1-u_2).$$

Folosind V-elipticitatea formei a şi inegalitatea Cauchy-Schwarz, rezultă

$$\|u_1-u_2\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_1-f_2\|.$$

Deci, avem într-adevăr dependenţă continuă a soluţiei faţă de f. □

Dacă j este funcţia indicatoare a unei submulţimi convexă şi închisă K din V, atunci $j = I_K$ este convexă, proprie şi semicontinuă inferior şi obţinem următorul rezultat

Corolar 1.2. *Pentru orice $f \in V'$, există o unică soluţie $u \in K$ a problemei*

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \tag{1.46}$$

În plus, soluţia depinde Lipschitz continuu de alegerea lui f.

1.6 Metode de aproximare pentru inecuaţii variaţionale

Pentru problema (1.46) vom prezenta câteva metode de aproximare numerică. Aceasta este o scurtă trecere în revistă a metodelor de aproximare numerică pe care le vom folosi pentru a obţine rezultate şi exemple pentru fiecare problemă discutată.

Metoda penalizării

Penalizarea are ca idee aproximarea ecuaţiei (1.46) cu ecuaţii în care apare un termen de penalizare care se măreşte pe măsură ce soluţiile aproximative u se depărtează de mulţimea K. În acest mod, termenul de penalizare forţează soluţiile aproximative să rămână în mulţimea K. Indicăm pentru detalii suplimentare asupra acestei metode Céa [39] sau Arnăutu şi Neittaanmäki [12], iar pentru o expunere asupra penalizării problemelor de obstacol cităm Rodrigues [119]. Metoda este des întalnită în literatura matematică şi folosită cu succes în mulţi algoritmi de aproximare a soluţiilor, cum ar fi de exemplu algoritmul de optimizare de tip punct interior sau articole precum Arnold [13] sau Forsyth şi Vetzal [57], dar este în acelaşi tip utilizată şi ca metodă de obţinere a unor rezultate teoretice ca în articolele lui Tsutsumi şi Yasuda [135] şi Butt [18]

Introducem o funcţională $j : V \to (-\infty, +\infty]$ convexă, proprie şi semicontinuă inferior astfel încât $j(v) \geq 0$, pentru orice $v \in V$ şi $\text{Ker}(j) = K$. Obţinem astfel o inecuaţie variaţională de tipul

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in V. \tag{1.47}$$

Pentru orice $\lambda > 0$, definim funcţionala $j_\lambda : V \to (-\infty, +\infty]$ prin

$$j_\lambda(v) = \frac{1}{\lambda} j(v), \quad \forall v \in V.$$

Atunci j_λ are aceleaşi proprietăţi ca funcţionala j.

Definim problema aproximantă: Găsiţi $u_\lambda \in V$ astfel încât

$$a(u_\lambda, v - u_\lambda) + j_\lambda(v) - j_\lambda(u_\lambda) \geq (f, v - u_\lambda), \quad \forall v \in V. \tag{1.48}$$

Sub aceste ipoteze, (1.48) are soluţie unică pentru orice $\lambda > 0$. (Teorema 1.31, Secţiunea 1.5.1). Se poate demonstra următorul rezultat de convergenţă

Teorema 1.32 (Teorema 3.28, pp. 77, Arnăutu şi Neittaanmäki [12])**.** *Fie u soluţia problemei* (1.46) *şi u_λ soluţiile problemelor aproximative* (1.48)*. Atunci*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda - u\| = 0$$

şi

$$\lim_{\lambda \to 0} j_\lambda(u_\lambda) = 0$$

Regularizarea

Metoda regularizării este una din metodele clasice de aproximare a soluţiilor inegalităţiilor variaţionale. Expuneri pe acest subiect se găsesc în multe monografii cum ar fi cea a lui Adams [3], care o foloseşte pentru a demonstra rezultate de densitate a spaţiilor de funcţii. Sofonea şi Matei [126] analizează metoda regularizării pentru inecuaţii variaţionale de evoluţie, în mod similar cu metoda propusă de Duvaut şi Lions [94] pentru inegalităţi variaţionale parabolice de evoluţie. De asemenea, metoda este prezentă şi în lucrări mai noi, cum ar fi Addou şi Zahi [4], care o foloseşte pentru a aproxima soluţiile unei probleme penalizată pe frontieră, sau Alber [7], unde se demonstrează convergenţa şi stabilitatea metodei de regularizare a inecuaţiilor variaţionale cu operatori monotoni neliniari şi nemărginiţi pe spaţii Banach.

Considerăm o inecuaţie de tipul (1.47) cu o funcţie j proprie, convexă şi semicontinuă inferior. Dacă funcţia j nu este diferenţiabilă, o putem aproxima cu o familie de funcţii convexe şi diferenţiabile j_ε astfel încât $j_\varepsilon \to j$ pentru $\varepsilon \to 0$. O bine cunoscută metodă de regularizare este utilizarea funcţiilor de netezire şi a convoluţiilor.

Considerăm ρ o funcţie cu valori reale, pozitive din $C_0^\infty(\Omega)$ cu proprietăţile:

(i) $\rho(x) = 0$, daca $|x| \geq 1$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$.

Cel mai raspândit exemplu de acest tip sunt funcţiile de forma

$$\rho(x) = \begin{cases} k \exp[-1/(1 - |x|^2)], & \textit{dacă} \ \ |x| < 1 \\ 0, & \textit{dacă} \ \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

unde $k > 0$ este o constantă aleasă special astfel încât condiţia (ii) să fie îndeplinită de către funcţia ρ.

Considerăm acum familia de funcţii $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$, pentru orice $\varepsilon > 0$.

Construim regularizarea lui j prin

$$j_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon \star j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y-x)j(y)dy$$

Această regularizare are proprietăţi foarte bune pe care le amintim aici deoarece le vor folosi mai târziu, însă pentru demonstraţie indicăm Adams [3], pp. 36-38.

Propoziţia 1.7. *Fie j o funcţie definită pe $\mathbb{R}^n$ cu suportul într-un domeniu Ω, nu neaparat mărginit.*

(a) *Dacă $j \in L^1_{loc}(\bar{\Omega})$, atunci $j_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Dacă suportul lui j este submulţime compactă a lui Ω, atunci $j_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ pentru $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(j), \partial\Omega)$.*

(c) *Dacă $j \in L^p(\Omega)$, cu $1 \le p < \infty$, atunci $j_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ şi, în plus,*

$$\|j_\varepsilon\|_p \le \|j\|_p, \quad \lim_{\varepsilon \to 0_+} \|j_\varepsilon - j\|_p = 0$$

(d) *Dacă $j \in C(\Omega)$ şi G este o submulţime compactă a lui Ω, atunci*

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} j_\varepsilon(x) = j(x), \text{ uniform pe } G$$

(e) *Dacă $j \in C(\bar{\Omega})$, atunci*

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} j_\varepsilon(x) = j(x), \text{ uniform pe } \Omega$$

(f) *Dacă $j \in W^{m,p}(\Omega)$. Dacă $\Omega' \subset\subset \Omega$ atunci*

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} j_\varepsilon = j, \quad \hat{in} \ W^{m,p}(\Omega').$$

Atunci problema aproximantă devine

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \ge (f, v - u_\varepsilon), \forall v \in V \tag{P_ε}$$

Propoziţia 1.8 (Tremolieres, Lions şi Glowinski [133], pp. 22)**.** *Soluţiile u_ε ale problemelor (P_ε) sunt convergente la u, soluţia problemei* (1.42) *în V, pentru $\varepsilon \to 0$.*

Metoda elementului finit

Evidenţiem pe scurt metoda elementului finit, deoarece este foarte cunoscută şi utilizată în aplicaţii numerice. Ea apare în monografii precum Ciarlet [42, 44], Tremolieres, Lions şi Glowinski [133] Arnăutu şi Neittaanmäki [12], Glowinski [69], şi Axelsson şi Barker [15]. Este o metodă extrem de folosită, datorită capacităţii ei de aproximare şi utilizată în implementarea algoritmilor de optimizare sau de rezolvare de ecuaţii. Multe articole în care se dezvoltă noi algoritmi de rezolvare numerică folosesc această metodă. Amintim aici articolele Gabay şi Mercier [62], Ryoo [120], An [9] care studiază probleme legate de subiectul acestei teze.

Considerăm problema (1.46). Descriem, în acest cadru, metoda de aproximare Galerkin care stă la baza metodei de element finit. Considerăm V un spaţiu Hilbert cu norma $\|\cdot\|$. Precizăm că metoda poate fi folosită, de exemplu, pe spaţii Sobolev ca $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H_0^2(\Omega)$ (conform Ciarlet [43])

Considerăm problema pe un domeniu poligonal Ω din plan. Se stabileşte o triangulaţie $\mathcal{T}_h$ pe Ω, formată din triunghiuri T. Mai exact, $\mathcal{T}_h$ este o mulţime finită de triunghiuri T cu proprietăţile

$$T \subset \bar{\Omega}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \bigcup_{T \in \mathfrak{T}_h} T = \bar{\Omega}$$

astfel încât

$$(int\, T_1) \cap (int\, T_2) = \emptyset, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h \text{ cu } T_1 \neq T_2.$$

De fapt, dacă $T_1 \neq T_2$, atunci ele au intersecţia vidă sau, fie au în comun un vârf, fie o muchie. Parametrul h este egal cu lungimea celei mai lungi muchii a triunghiurilor din $\mathcal{T}_h$.

Unei asemenea triangulaţii se asociază spaţiul V_h al funcţiilor definite pe Ω a căror restricţie pe fiecare triunghi T aparţin spaţiului finit dimensional P_T al funcţiilor definite pe T.

Pentru $V = H^1(\Omega)$, avem următorul rezultat:

Teorema 1.33 (Teorema 2.1.1, pp. 39, Ciarlet [43])**.** *Presupunem că $P_T \subset H^1(T)$ pentru orice triunghi $T \in \mathcal{T}_h$ şi $V_h \in C(\overline{\Omega})$. Are loc incluziunea $V_h \subset H^1(\Omega)$. Dacă, în plus, funcţiile din V_h se anulează pe frontiera $\partial\Omega$, atunci $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.*

Dacă $V = H^2(\Omega)$ se poate demonstra rezultatul similar

Teorema 1.34 (Teorema 2.1.2, pp. 40, Ciarlet [43])**.** *Presupunem că $P_T \subset H^2(T)$ pentru orice triunghi $T \in \mathcal{T}_h$ şi $V_h \in C^1(\overline{\Omega})$. Are loc incluziunea $V_h \subset H^2(\Omega)$. Dacă funcţiile din V_h se anulează pe frontiera $\partial\Omega$, atunci $V_h \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. În condiţiile în care $v_h = \partial_\nu v_h = 0$ pe $\partial\Omega$ pentru orice $v_h \in V_h$ avem $V_h \subset H_0^2(\Omega)$.*

Fie $\{V_h\}_h$ familia de subspaţii finit dimensionale ale lui V, asociată triangulaţiilor $\mathcal{T}_h$, şi $\{K_h\}_h$ o familie de submulţimi închise, convexe şi nevide ale lui V cu proprietatea că $K_h \subset V_h$, $\forall h > 0$, considerate astfel încât $\lim_{h\to 0} K_h = K$ în sens Mosco.

Atunci problema aproximativă Galerkin este: Găsiţi $u_h \in K_h$ astfel încât

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_h. \tag{1.49}$$

Avem următorul rezultat de convergenţă

Teorema 1.35 (Teorema 3.18, pp. 62, Arnăutu şi Neittaanmäki [12]). *Notăm soluţia problemei* (1.46) *cu* u *şi soluţiile problemelor aproximative* (1.49) *cu* u_h. *Atunci, sub ipotezele de mai sus,*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0.$$

Pentru mai multe detalii asupra metodei elementului finit indicăm Arnăutu şi Neittaanmäki [12] (pp. 61-75), Ciarlet [42] şi Elliott şi Ockendon [51] (pp. 70-91). În particular, Glowinski [69], pp. 28-41, discută metoda elementului finit pentru problema obstacolului.

Este important de adăugat aici că putem lucra cu diverse spaţii de funcţii de tipul elementelor finite. În aplicaţii am folosit, acolo unde nu era necesară o mai mare regularitate, elemente finite continue şi liniare pe porţiuni pe care le vom numi elemente finite de tip P_1, mai exact

$$P_1 = \{v \in H^1(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \text{ liniare, continue pe K}\}$$

Totuşi, atunci când problema o cere, putem înlocui acest spaţiu cu unul mai regulat, de exemplu cu spaţiul de elemente finite de tip P_2 care sunt continue şi pătratice pe porţiuni. În rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, însă, sunt des folosite şi spaţii duble de tipul $[P_1, P_1]$, pentru a reţine în interiorul unei singure variabile funcţia şi Laplaceanul ei. Vom mai folosi şi elemente finite de tip Morley, în special pentru placa încastrată. Acest tip de element finit prezintă o regularitate mai mare. Elementele acestui tip de spaţiu sunt de tip P_3, continue în vârfurile reţelei şi cu derivata continuă în mijlocul fiecărei muchii a fiecărui triunghi K din $\mathcal{T}_h$.

$$\begin{aligned} P_M &= \{v \in L^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_3, v \text{ continuă la vârfuri,} \\ &\quad \partial_n v \text{ continuă în mijocul muchiei.}\} \end{aligned}$$

Din punct de vedere al programării, aceste elemente sunt tridimensionale, în sensul că, pentru a defini o funcţie u este nevoie să specificăm atât funcţia propriu-zisă cât şi derivatele sale parţiale, mai exact $[u, u_x, u_y]$.

Optimizare de tip punct interior - IPOPT

În această secţiune facem o scurtă descriere a algoritmului de punct interior folosit în aplicaţiile numerice din capitolele viitoare. Teoria din spatele acestui algoritm este foarte amplă, de aceea, ne vom limita la a enunţa paşii algoritmului fără a face comentarii pe baza rezultatelor.

Pe scurt, o problemă cu restricţii poate fi redusă la o problemă cu paramentru, fără restricţii prin impunerea unui termen de penalizare sau unui termen de barieră. În timp ce metoda de penalizare constă în adăugarea unui parametru pozitiv, dacă funcţia este evaluată în afara zonei admisibile, metoda de barieră impune un parametru prin care determină prevenţia părăsirii zonei admisibile la fiecare iteraţie.

Teoria din spatele acestui tip de optimizare îi are ca precursori pe Fiacoo şi McCormick, care sunt şi primii care au folosit termenul de "metodă de punct interior", în cartea lor [52], în care descriu în detaliu relaţia dintre minimizanţii funcţiilor cu barieră şi a celor cu penalizări, cât şi relaţia acestora cu soluţiile problemei orginale cu restricţii. Totuşi, această primă încercare de a dezvolta metoda de punct interior are parte de un declin imens după publicarea articolelor lui Lootsma [95] şi al lui Murray [106], care au arătat că Hessiana funcţiei de barieră are condiţii care nu sunt bine puse atunci când soluţia aproximantă este foarte aproape de soluţia teoretică. În plus, apariţia altor metode în care nu se regăseau obstacole de acest tip, în special cele bazate direct pe condiţiile de optimalitate ale problemei cu restricţii au câştigat în faţa metodei de punct interior. Dintre acestea, cele mai cunoscute sunt metodele de tipul programării secvenţial pătratice şi cele de tip Lagragean argumentat introdus de Hestenes [77] şi Powell [114] şi perfecţionate sau utilizate de Bazaraa [23], Fletcher [55], Gill [67], Griva, Nash şi Sofer [73], Wright şi Nocedal [140], Haslinger şi Mäkinen [75].

Totuşi în ultimii ani, s-au găsit modalităţi pentru a compensa problemele acestei metode şi de a o readuce în discuţie ca pe o metodă eficientă, asa cum indică articolele Forsgren, Gill şi Wright [56], Wright [139], pornind de la revoluţionarul articol al lui Karmarkar [83], în care este prezentată o formă echivalentă de metodă de barieră prin care soluţia se obţinea de 50 de ori mai rapid decât cu alte metode cunsocute.

Prezentăm aici, deci, doar mici detalii care ajută la înţelegerea funcţionării algoritmului numit în cele ce urmează IPOPT (**I**nterior **P**oint **OPT**imizer).

Considerăm problema de minimizare:

$$\min\{f(x) : x \in K\} \tag{1.50}$$

unde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $K = \{x \in \mathbb{R}^n : c_i(x) \geq 0, \forall i, 1 \leq i \leq m\}$. Presupunem că $f, c_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Algoritmul are ca scop găsirea unui punct de tip Karush-Kuhn-Tucker pentru problema considerată, prin rezolvarea unui şir de probleme fără restricţii, indexate după $\mu > 0$, de forma

$$\min\{f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln c_i(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1.51}$$

Teorema 1.36 (Teorema 3.10, Forsgren, Gill şi Wright [56]). *Pentru orice şir $\mu_k \to 0$, există un şir x_k de soluţii ale problemelor* (1.51) *convergent la o soluţie locală a problemei* (1.50).

Pentru $\mu > 0$, problemele de tip (1.51) se reduc la găsirea unui $x_\mu \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$\nabla f(x_\mu) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu}{c_i(x_\mu)} \nabla c_i(x_\mu) = \nabla f(x_\mu) - J_c(x_\mu)^T \begin{pmatrix} \mu/c_1(x_\mu) \\ \vdots \\ \mu/c_m(x_\mu) \end{pmatrix} = 0 \tag{1.52}$$

Notăm cu $\lambda_\mu \in \mathbb{R}^n$ vectorul cu componentele $\lambda_{\mu,i} = \mu/c_i(x_\mu)$. Putem, deci, rescrie (1.52) astfel

$$\nabla f(x_\mu) - J_c(x_\mu)^T \lambda_\mu = 0.$$

Apoi, prin aplicarea unei metode de tip Newton acestei probleme, calculăm, de fapt, soluţia ecuaţiei (1.52) pentru valori din ce în ce mai mici ale lui $\mu > 0$. De notat este că $\lambda_{\mu,i}$, pentru $\mu \to 0$, converg la multiplicatorii lui Lagrange din condiţiile Karush-Kuhn-Tucker, Teorema 1.17.

Asupra implementării algoritmului cităm Wächter şi Biegler [137], însă putem preciza că se bazează pe o relaţie dintre ecuaţiile primale-duale, de tipul

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \nabla c(x)\eta - z &= 0 \\ c(x) &= 0 \\ XZe - \mu e &= 0. \end{aligned}$$

Parametrul μ se numeşte *parametru de homotopie* şi este condus la zero (pentru detalii indicăm Byrd, Liu şi Nocedal [35], Gould, Orban, Sartenaer şi Toint [70]). Aici, $\eta \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$ corespund multiplicatorilor Lagrange ai restricţiilor problemei (1.50). Mai mult $\mu = 0$ şi $x, z \geq 0$ corespund condiţiilor Karush-Kuhn-Tucker ale problemei originale (1.50). Acestea provin din condiţiile de optimalitate de ordinul întâi pentru problema (1.51) (conform Conn, Gould şi Toint [46]).

Ideea generală este de a aproxima soluţiile problemei (1.52) pentru un parametru fixat μ. Acest parametru este micşorat şi se continuă căutarea soluţiei noii probleme de barieră rezultate, pornind de la soluţia gasită anterior.

Capitolul 2

Probleme de ordin doi

Problema obstacolului a apărut în literatura matematică în cazul special al obstacolului definit ca funcţie indicatoare a unei submulţimi compacte E al unui domeniu Ω şi era legată de capacitate, în Stampacchia [130]. Continuând apoi să se ocupe de acest tip probleme, Stampacchia, în [129, 131], a dezvoltat teorii utile şi a deschis drumul spre studiul problemelor de obstacol. În lucrări precedente Fichera [54] se ocupase de primele probleme unilaterale şi de problema Signorini din teoria elastoplastică (Fichera [53]). Una dintre primele legături făcute între problemele de obstacol şi cele de frontieră liberă îi este atribuită lui Lewy şi Stampacchia [90]. Aceste lucrări au deschis orizontul pentru studiul problemei obstacolului. Mulţi autori au dezvoltat acest subiect, printre aceştia amintim Giaquinta şi Pepe [66], Giusti [68], Gerhardt [65], Kinderlehrer [85, 86], Nitsche [108].

Citām şi monografiile Kinderlehrer şi Stampacchia [87], Glowinski [69], şi Barbu şi Precupanu [22], care cuprind investigaţii importante asupra problemelor unilaterale. Mai recent, în articolul lui Hintermüller şi Rösel [78], o abordare utilizând teorema lui Fenchel şi metoda seminetedă a lui Newton a fost utilizată pentru a obţine rezultate asupra problemelor de contact semistatice. În lucrarea lui Schaeffer [122], problema obstacolului este rezolvată cu ajutorul teoremei Nash-Moser a funcţiilor implicite.

Problema obstacolului, pe lângă aplicaţiile matematice ale ei, are şi diverse aplicaţii mecanice şi fizice. Putem cita aici Rodrigues [119], Caffarelli şi Friedman [36], Caffarelli [38], Duvaut şi Lions [50] şi Ciarlet [44]. Cu privire la aplicaţiile problemelor de obstacol amintim studiul filtrării fluidelor în medii poroase, încalzirea controlată, elasto-plasticitate, control optimal şi matematica financiară. Câteva articole recente asupra acestor subiecte sunt Griesse şi Kunisch [71], Murea şi Tiba [104, 105], Burger, Matevosyan şi Wolfram [34], Baiocchi [20] şi Wilmott [138].

Problema de obstacol este, de asemenea, foarte utilă în testarea unor noi algoritmi. De pildă, Badea, [19] testează metode de decompoziţie de nivel unu şi doi ale domeniilor pe problema cu două obstacole, în spaţii Sobolev de ordin mare. Cu privire la algoritmi, însă, mulţi autori se preocupă în a găsi noi metode de rezolvare a problemelor de obstacol (Pérez, Cascón şi Ferragut [112]).

În acest capitol, vom discuta despre ecuaţii şi inecuaţii variaţionale de ordinul al doilea şi vom aplica aceste rezultate în studiul problemelor de obstacol. În prezentarea ecuaţiilor variaţionale vom avea în vedere rezultate cunoscute şi mai puţin cunoscute, încercând să facem o scurtă trecere în revistă a proprietăţilor soluţiilor problemelor de ordin doi. În Secţiunea 2.2 tratăm problema obstacolului de ordinul al doilea cu obstacol nul aplicând o metodă bazată pe dualitate şi arătăm că este suficient să rezolvăm o problemă de minimizare pătratică pentru a obţine soluţia aproximativă a problemei. În Secţiunea 2.3 rezolvăm problema cu obstacol general, reducând-o la o problemă de obstacol nul. Ultima secţiune a acestui capitol este rezervată aplicaţiilor numerice ale metodei, calculate folosind `Matlab` [98] şi `Freefem++` versiunea 3.23 [76]. Rezultatele sunt comparate cu rezultatele obţinute prin metode de element finit sau de optimizare de tip punct interior detaliate în Secţiunea 1.6.

2.1 Problema obstacolului - prezentare generală

Din punct de vedere matematic, vom considera că o membrană omogenă ocupă în planul xOy un domeniu Ω şi este întinsă uniform cu ajutorul unei tensiuni uniforme. Presupunem că asupra acestei membrane acţionează o forţă uniform distribuită pe Ω, pe care o notăm cu f.

Pentru orice punct $(x, y) \in \Omega$ considerăm deplasarea $u(x, y)$ perpendiculară pe planul xOy. Impunem ca deformarea pe frontiera $\partial\Omega$ să aibă loc după o deformare prestabilită $g = g(x, y)$. De aici obţinem condiţia

$$u = g, \quad \text{pe } \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Considerând $\lambda > 0$ constanta de elasticitate a membranei, expresia energiei potenţiale de deformare este, conform Rodrigues [119],

$$D(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\, dy. \tag{2.2}$$

Fără a pierde generalitatea putem considera $\lambda \equiv 1$.

Lucrul mecanic exercitat de forţele externe în timpul deplasării este dat de

$$F(u) = \int_\Omega fu\, dx\, dy.$$

Atunci, energia potenţială totală este

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy - \int_\Omega fu\, dx\, dy. \tag{2.3}$$

Poziţia de echilibru pentru problema obstacolului se reduce astfel la aflarea unei funcţii $u = u(x, y)$ pentru care energia de deformare (2.2) este minimizată şi care respectă condiţiile la limită (2.1).

Conform teoriei calculului variaţional, condiţia necesară asupra lui u pentru a fi soluţie a problemei de minim este aceea de a verifica ecuaţia Euler asociată lui (2.3), adică ecuaţia Poisson

$$-\Delta u = f, \quad \text{pe } \Omega$$

Introducem acum un corp reprezentat prin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z \le \psi(x, y)\}$, cu o înălţime g pe frontiera lui Ω. Funcţia ψ este definită pe Ω şi satisface condiţia $\psi \le g$ pe $\partial\Omega$ şi o vom numi *obstacol*.

Introducem mulţimea convexă a deplasărilor admisibile

$$K = \{v \in V : v \ge \psi \ \text{ pe } \ \Omega, v = g \ \text{ pe } \ \partial\Omega\} \tag{2.4}$$

unde V este spaţiul vectorial al funcţiilor cu energie de deplasare finită. Observăm că acest spaţiu este de fapt spaţiul Sobolev $H^1(\Omega)$.

Astfel, problema de obstacol poate fi reformulată ca problemă de minim pentru funcţionala energie

$$u \in K : E(u) \le E(v), \quad \forall v \in K \tag{2.5}$$

Propoziţia 2.1 (Rodrigues [119], pp. 3)**.** *Problema* (2.5) *este echivalentă cu inegalitatea variaţională*

$$u \in K : \int_\Omega \nabla u \nabla(v - u) dx\, dy \ge \int_\Omega f(v - u) dx\, dy \tag{2.6}$$

Demonstraţie. Fie u o funcţie în V soluţie a problemei (2.5). Deoarece $u + \theta(v - u) \in K$, pentru orice $\theta \in [0, 1]$ funcţia

$$h(\theta) = E(u + \theta(v - u))$$

are minimul în punctul $\theta = 0$. Atunci $h'(\theta) \ge 0$, adică

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v - u) dx\, dy - \int_\Omega f(v - u) dx\, dy = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}(E(u + \theta(v - u)) - E(u)) \ge 0.$$

Atunci, cum u este soluţie a lui (2.5), avem că u verifică inegalitatea variaţională (2.6).

Reciproc, dacă u satisface (2.6) atunci

$$\begin{aligned} E(v) &= E(u+(v-u)) = E(u) + \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) - \int_\Omega f(v-u) \\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v-u)|^2 \geq E(u), \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

deci este soluţie pentru problema de minim (2.5). □

Dacă soluţia u a problemei (2.5) (respectiv (2.6)) este continuă putem partiţiona Ω astfel: notăm cu I mulţimea punctelor în care membrana atinge obstacolul, adică

$$I = \{(x,y) \in \Omega : u(x,y) = \psi(x,y)\}$$

şi o vom numi *mulţime de coincidenţă*, iar cealaltă parte a membranei

$$\Lambda = \{(x,y) \in \Omega : u(x,y) > \psi(x,y)\}$$

se numeşte *mulţime de necoincidenţă*. Dacă şi ψ este o funcţie continuă, atunci Λ este mulţime deschisă.

Propoziţia 2.2. *Dacă $\Delta u \in L^2(\Omega)$, problema (2.6) este echivalentă cu problema următoare*

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = f, & \text{pe } \Lambda \\ -\Delta u \geq f, & \text{pe } \Omega \\ (u-\psi)(-\Delta u - f) = 0, & \text{a.p.t. pe } \Omega, \\ u = g, & \text{pe } \partial\Omega \end{array} \tag{2.7}$$

Demonstraţie. Considerăm întâi că u este soluţie pentru problema (2.6).

Fie $\varphi \in \mathcal{D}(\Lambda)$ arbitrar. Există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $v = u \pm \varepsilon\varphi \in K$, pentru orice $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Introducem acest v în (2.6) şi integrăm prin părţi. Obţinem

$$\pm\varepsilon \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - f\varphi) = \pm\varepsilon \int_\Lambda (-\Delta u - f)\varphi \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Lambda).$$

Prin urmare

$$-\Delta u = f, \quad \text{pe } \Lambda = \{u > \psi\}. \tag{2.8}$$

Cum Δu este funcţie integrabilă, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cu $\varphi \geq 0$, alegem în (2.6) $v = u + \varphi \in K$. Avem

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

În consecinţă, $-\Delta u - f \geq 0$ a.p.t. pe Ω. Rezultă deci, folosind şi relaţia (2.8), că (2.6) implică (2.7).

Reciproc, considerăm u soluţie a problemei (2.7). Atunci

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) = -\int_\Omega \Delta u(v-u) = \int_\Lambda f(v-u) - \int_I \Delta u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), \forall v \in K$$

adică u verifică problema (2.6). □

Remarca 2.1. Frontiera mulţimii de coincidenţă I în Ω

$$\Phi = \partial I \cap \Omega = \Omega \cap \partial\Lambda$$

se numeşte *frontieră liberă* şi nu este cunoscută aprioric, iar formularea (2.7) se numeşte *problemă de frontieră liberă.*

În condiţii de regularitate asupra lui u, putem privi problema (2.7) ca o problemă Cauchy pentru operatorul Δ, cu necunoscutele u şi Φ

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = f, & \text{in } \Lambda = \Omega \setminus I \\ u = g, & \text{pe } \partial\Omega \cap \partial\Lambda \\ u = \psi, & \text{pe } \Phi \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n}, & \text{pe } \Phi. \end{array} \tag{2.9}$$

Cele prezentate mai sus, au ca scop modelarea matematică a problemei de obstacol. În continuare, vom enunţa unele rezultate utile asupra problemei de obstacol.

Vom considera $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ şi luăm $g = 0$. Fie V spaţiul $H_0^1(\Omega)$. Definim forma biliniară şi continuă

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad \forall u, v \in V$$

şi forma liniară şi continuă

$$l(v) = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in V.$$

Rescriem problema (2.6) ca

$$u \in K : a(u, v-u) \geq l(v-u), \forall v \in K \tag{2.10}$$

Am văzut, deja, că problema are soluţie unică care depinde Lipschitz continuu de f (Corolarul 1.2, Secţiunea 1.5.1).

Citâm fără demonstraţie rezultatul de regularitate pentru problema obstacolului obţinut pentru prima oară de Stampacchia şi Brézis [31].

Teorema 2.1. *Fie Ω un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^n$ cu frontieră netedă. Dacă $f \in L^p(\Omega)$, cu $1 < p < \infty$ şi $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$, atunci soluţia problemei* (2.10) *este în $W^{2,p}(\Omega)$.*

Remarca 2.2. Ulterior Brézis [29] a îmbunătăţit rezultatul asupra regularităţii problemelor Dirichlet de obstacol:

$$u \in W^{s,p}, \quad \forall s < 2 + 1/p, \ \forall 1 < p < \infty$$

dacă forma biliniară a are coeficienţi Hölder continui, iar f şi $\Delta\psi$ aparţin spaţiului $L^\infty(\Omega)$ şi au variaţie mărginită pe Ω.

Remarca 2.3. Conform Teoremei de scufundare Sobolev (Teorema 1.10, Secţiunea 1.2), $W^{2,p}(\Omega) \to C^1(\bar{\Omega})$. Atunci soluţia problemei (2.10) este de fapt în $C^1(\bar{\Omega})$, pentru $p > 2$.

În continuare prezentăm un rezultat mai general de regularitate. În acest scop, introducem întâi câteva notaţii şi rezultate ajutătoare.

Considerăm pe un spaţiu Hilbert V o structură de latice în raport cu ordonarea "$\geq$" care este definită pe un spaţiu mai mare $W \supset V$. Fie V' dualul lui V, echipat de asemenea cu o structură de latice. Notăm

$$v^+ = \max\{v, 0\}, \quad v^- = \max\{-v, 0\} \quad \forall v \in V.$$

Fie $A : W \to V'$ operator strict T-monoton pe W, adică

$$(Au - Av, (u-v)^+) > 0, \quad \forall u, v \in W : (u-v)^+ \neq 0, (u-v)^+ \in V.$$

Pentru $\psi \in W$ obstacol definim $K = \{v \in V : v \geq \psi \text{ pe } W\} \neq \emptyset$ (ca în (2.4) pentru $g = 0$), Pentru $f \in V'$ considerăm problema abstractă de obstacol

$$u \in K : \quad (Au - f, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K. \tag{2.11}$$

Remarcăm că problema (2.10) este un caz particular pentru (2.11), când operatorul A este definit prin $(Au, v) = a(u, v)$.

Teorema 2.2 (Teorema 2.1, pp. 137, Rodrigues [119])**.** *Pe lângă ipotezele de mai sus, presupunem că*

$$\exists \mu \in V' : \mu \geq f, \quad \mu \geq A\psi \text{ pe } V' \tag{2.12}$$

şi

$$(\psi - v)^+ \in V, \quad \forall v \in V. \tag{2.13}$$

Notăm $u \in K$ soluţia problemei (2.11). *Atunci avem estimarea*

$$f \leq Au \leq \mu \text{ pe } V'. \tag{2.14}$$

Cu ajutorul relaţiei (2.14) şi folosind estimările pentru problema la limită fără obstacol, putem obţine estimări mai bune. Notăm $\mathcal{M}(\Omega)$ spaţiul Banach al măsurilor mărginite. Considerăm operatorul eliptic liniar de ordinul al doilea $A : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definit prin

$$Av = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Impunem coeficienţilor $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ proprietăţi de mărginire şi uniform elipticitate, adică există $\alpha > 0$ cu proprietatea

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.16}$$

Fie ψ un obstacol admisibil, adică având proprietăţile

$$\psi \in H^1(\Omega), \quad \psi|_{\partial\Omega} \leq 0, \quad A\psi = \nu \in \mathcal{M}(\Omega). \tag{2.17}$$

Teorema 2.3 (Teorema 2.4, pp. 139, Rodrigues [119])**.** *Admitem ipotezele de mai sus. Fie u soluţia problemei* (2.11) *pentru* $V = H_0^1(\Omega)$ *şi* $W = H^1(\Omega)$.

(i) *Dacă* $f = \lambda \in \mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$, *atunci* $Au = \mu \in \mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ *şi*

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + (\nu - \lambda)^+ \quad \text{în } \mathcal{M}(\Omega);$$

(ii) *Dacă* $f \in W^{-1,p}(\Omega) \cap \mathcal{M}(\Omega)$ *şi* $(A\psi - f)^+ \in W^{-1,p}(\Omega)$, *atunci* $Au \in W^{-1,p}(\Omega)$ *şi*

$$\|Au\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \|(A\psi - f)^+\|_{W^{-1,p}(\Omega)}, \quad 2 < p < \infty.$$

Acum, putem să enunţăm teorema de regularitate:

Teorema 2.4 (Teorema 2.5, pp.141, Rodrigues [119])**.** *Sub ipotezele* (2.15)-(2.17)*, soluţia u a problemei* (2.11) *are următoarele proprietăţi:*

(i) *Există* p^*, *cu* $2 < p^* < +\infty$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} u \in W_0^{1,p}(\Omega), &\quad \forall 1 < p < p^*, \quad \text{dacă } \partial\Omega \in C^1; \\ u \in C^{0,\alpha}(\Omega), &\quad \text{cu } 0 < \alpha < 1, \quad \text{dacă } \partial\Omega \in C^{0,1}; \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), &\quad \forall 1 < p < +\infty, \quad \text{dacă } \partial\Omega \in C^1, a_{ij} \in C(\bar{\Omega}); \end{aligned}$$

în cazul în care

$$f \in W^{-1,p}(\Omega) \cap \mathcal{M}(\Omega), \quad (A\psi - f)^+ \in W^{-1,p}(\Omega), \quad \forall 2 < p < +\infty.$$

(ii) *Dacă* $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ *şi pentru* $1 < p < +\infty$

$$f \in L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega), \quad (A\psi - f)^+ \in W^{-1,p}(\Omega), \tag{2.18}$$

atunci

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad 1 < p < +\infty,$$

şi din teorema de scufundare Sobolev (Teorema 1.10, Cazul C', Secţiunea 1.2), avem

$$u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}), \text{ cu } 0 < \alpha < 1 - \frac{n}{p} < 1, \quad \text{dacă } p > n.$$

Remarca 2.4. O primă observaţie care se impune asupra (2.18) este aceea că spaţiul $L^p(\Omega)$ este inclus în $H^{-1}(\Omega)$ doar când $n \in \{1, 2\}$. Mai mult, condiţia $(A\psi - \sigma)^+ \in L^p(\Omega)$ este verificată într-una dintre următoarele două condiţii dacă $(A\psi)^+ \in L^p(\Omega)$ deoarece $(A\psi - \sigma)^+ \leq (A\psi)^+ + f^-$.

Remarca 2.5. Teorema 2.4 a fost obţinută sub ipoteze mai slabe de către diverşi autori folosind tehnici variate, obţinându-se aceleaşi rezultate în (i) şi pentru ipotezele $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $A\psi \in \mathcal{M}(\Omega)$, cu p corespunzător $2 < p < \infty$. Printre acestea amintim rezultatul DeGiorgi-Nash-Moser pentru continuitate Hölder, conform Biroli [26], Frehse [60] şi rezultatul de regularitate $W_0^{1,p}(\Omega)$, pentru $p > 2$ demonstrat prin interpolare de Boccardo [27] şi perfecţionat de Chicco [40]. Cu aceleaşi ipoteze asupra obstacolului, prin diferenţe finite a fost demosntrată şi regularitatea $C^{k,\alpha}(\Omega)$, pentru $k = 0$ sau 1 şi $0 < \alpha < 1$, în Frehse, [60].

2.2 Metoda de dualitate pentru probleme cu obstacol nul

În această secţiune discutăm problema obstacolului definită pe un spaţiu Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, cu $p > dim\ \Omega$. Ideea pe care o prezentăm este de a rezolva această problemă cu ajutorul unei probleme aproximante şi a dualei acesteia, pe care le enunţăm în Secţiunea 2.2.1. Aplicăm teorema de dualitate al lui Fenchel în Secţiunea 2.2.2 şi analizăm problema duală obţinută. Aici arătăm că soluţia problemei aproximative este o combinaţie liniară de distribuţii Dirac. În concluzie, rezolvând o problemă de minimizare pătratică putem construi soluţia aproximativă a problemei de obstacol aplicând o formulă de corespondenţă dintre soluţia duală şi cea primală. Rezultatele prezentate în această secţiune au fost publicate în articolele Merluşcă [100], [101] şi [103].

Folosind un alt argument de dualitate, Ito şi Kunisch, [79], au introdus o strategie de tip "primal-dual active set" şi au demonstrat că metoda bazată pe acestea este echivalentă cu metoda semi-netedă a lui Newton.

2.2.1 Enunţarea şi aproximarea problemei

Considerăm că $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită cu proprietatea tare Lipschitz locală. Studiem problema de obstacol

$$\min_{y \in W_0^{1,p}(\Omega)_+} \left\{ \frac{1}{2} \|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \right\} \tag{2.19}$$

unde $f \in L^1(\Omega)$, $p > n = dim\ \Omega$, şi $W_0^{1,p}(\Omega)_+ = \{y \in W_0^{1,p}(\Omega) : y \geq 0 \text{ in } \Omega\}$.

Cu Teorema Sobolev avem $W^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ şi are sens să considerăm următoarea problemă aproximantă

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \ \ : \ y \in W_0^{1,p}(\Omega); y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k \right\} \tag{2.20}$$

unde $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ este o mulţime densă în Ω, căreia nu i se impun condiţii de nedegenerare sau uniformitate ca în teoria elementului finit. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, notăm

$$C_k = \{y \in W_0^{1,p}(\Omega) : y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k\}$$

conul închis şi convex.

Propoziţia 2.3. *Au loc următoarele afirmaţii*

(i) *Problema* (2.19) *admite soluţie unică* $\bar{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)_+$.

(ii) *Problema* (2.20) *are o unică soluţie* $\bar{y}_k \in C_k$.

Demonstraţie. (i) Existenţa şi unicitatea soluţiei $\bar{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)_+$, rezultă din Corolarul 1.2, Secţiunea 1.5.1 pentru $a(y,y) = \frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ şi $K = W_0^{1,p}(\Omega)_+$.

(ii) Fie k arbitrar fixat. Fie un şir minimizant $y_m^k \in C_k$, adică

$$\frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f y_m^k \to \inf(P_k)$$

Cum $\inf(P_k)$ există întotdeauna şi este strict mai mic decât $+\infty$ avem că există $M_k > 0$ astfel încât

$$\frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f y_m^k \leq M_k < +\infty$$

Presupunem prin absurd că $\|y_m^k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$. Atunci

$$\begin{aligned} +\infty > M_k &\geq \frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f y_m^k \\ &\geq \frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|f\|_{L^1(\Omega)}\|y_m^k\|_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c\|f\|_{L^1(\Omega)}\|y_m^k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

Pentru $m \to +\infty$ avem $+\infty > M_k \geq +\infty$, ceea ce este, evident, o contradicţie. Atunci presupunerea făcută este falsă, iar şirul $\{\|y_m^k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} : m \in \mathbb{N}\}$ este mărginit. Deci putem extrage un subşir slab convergent $\{y_m^k\} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$. Atunci există $\hat{y}^k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $y_m^k \to \hat{y}^k$ slab în $W_0^{1,p}(\Omega)$. Acest lucru implică

$$\int_\Omega f y_m^k \to \int_\Omega f \hat{y}^k$$

şi

$$\liminf_{m\to+\infty} \left\{\frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right\} \geq \frac{1}{2}\|\hat{y}^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \inf_{y\in C_k} \left\{\frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f y\right\} &= \liminf_{m\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\|y_m^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f y_m^k\right\} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\hat{y}^k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f \hat{y}^k \end{aligned}$$

Cum C_k este închisă şi convexă şi $y_m^k \to \hat{y}^k$ slab, atunci $\hat{y}^k \in C_k$. Deci $\hat{y}^k$ este minimul problemei (2.20).

Notăm cu φ funcţionala strict convexă

$$y \mapsto \frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy.$$

Presupunem că există $\hat{y}_0^k \in C_k$ astfel încât $\hat{y}_0^k \neq \hat{y}^k$ şi $\varphi(\hat{y}_0^k) = \varphi(\hat{y}^k)$. Atunci, pentru $\lambda \in (0,1)$, avem

$$\varphi(\hat{y}^k) \leq \varphi(\lambda\hat{y}_0^k + (1-\lambda)\hat{y}^k) < \lambda\varphi(\hat{y}_0^k) + (1-\lambda)\varphi(\hat{y}^k) = \varphi(\hat{y}_0^k)$$

Deci $\varphi(\hat{y}^k) < \varphi(\hat{y}_0^k)$. Am ajuns astfel la o contradicţie. Atunci $\hat{y}^k$ este unic, şi este elementul căutat, pe care îl notăm cu $\bar{y}_k$. □

Mai mult, demonstrăm următorul rezultat de aproximare

Teorema 2.5. *Şirul* $\{\bar{y}_k\}_k$ *al soluţiilor problemelor* (2.20)*, pentru* $k \in \mathbb{N}$*, este un şir tare convergent în* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la unica soluţie* $\bar{y}$ *a problemei* (2.19).

Demonstraţie. Fie $\{\bar{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ şirul soluţiilor problemelor (2.20). Considerăm $y \in W_0^{1,p}(\Omega)_+$ arbitrar. Atunci $y \in C_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Rezultă

$$\frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \geq \frac{1}{2}\|\bar{y}_k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\bar{y}_k, \quad \forall y \in W_0^{1,p}(\Omega)_+, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Atunci

$$\inf_{y\in W_0^{1,p}(\Omega)_+} \left\{\frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy\right\} \geq \frac{1}{2}\|\bar{y}_k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\bar{y}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Atunci şirul $\left\{\|\bar{y}_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right\}_k$ este mărginit. Deci şirul $\{\bar{y}_k\}_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este slab convergent la un element $\hat{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pe un subşir.

Cum $\bar{y}_k(x_i) \geq 0$ şi $\bar{y}_k \to \hat{y}$ uniform pe $\overline{\Omega}$, atunci pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ avem $\bar{y}_k(x) \to \hat{y}(x)$. Atunci $\hat{y}(x_i) \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Deoarece mulţimea $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\overline{\Omega}$ şi $\hat{y}$ este continuă, rezultă că $\hat{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)_+$. În concluzie, $\hat{y}$ este admisibil pentru (2.19).

Pe de altă parte, cum $\bar{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)_+$, putem scrie (2.21) pentru $\bar{y}$, adică

$$\frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\bar{y} \geq \frac{1}{2}\|\bar{y}_k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\bar{y}_k. \tag{2.22}$$

Trecând la limită, şi considerând slaba semicontinuitate inferioară a normei, obţinem

$$\frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\bar{y} \geq \frac{1}{2}\|\hat{y}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\hat{y}.$$

Dar, deoarece problema (2.19) are soluţie unică, avem că $\bar{y} = \hat{y}$. Astfel, am demonstrat că $\bar{y}_k \to \bar{y}$ slab în $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pentru a deduce convergenţa tare, folosim (2.22) şi avem

$$\frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|\bar{y}_k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Din convergenţa slabă deja demonstrată avem şi

$$\frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|\bar{y}_k\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Deci, obţinem, din (2.23) şi (2.24) că $\bar{y}_k \to \bar{y}$ tare în $W_0^{1,p}(\Omega)$, folosind Propoziţia 1.2, Secţiunea 1.1. Convergenţa este adevărată fără a fi necesară exstragerea unui subşir deoarece limita este unică. $\square$

2.2.2 Problema duală

În această secţiune aplicăm Teorema de dualitate a lui Fenchel (Teorema 1.21, Secţiunea 1.4) pentru a obţine problemele duale asociate problemelor (2.19) şi (2.20). Vom folosi duala problemei (2.20) pentru a găsi o soluţie aproximativă a problemei (2.19). Pentru a realiza acest lucru, considerăm funcţionala

$$F(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy, \quad y \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.25}$$

Fie q exponentul conjugat a lui p. Folosind definiţia conjugatei convexe şi faptul că aplicaţia de dualitate $J : W_0^{1.p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$ este operator univoc şi bijectiv (Remarca 1.5, Secţiunea 1.2) calculăm conjugata convexă a acestei funcţionale.

$$\begin{aligned}
F^*(y^*) &= \sup\left\{(y^*, y) - \frac{1}{2}\|y\|^2_{W^{1.p}(\Omega)} + \int_\Omega fy : y \in W_0^{1.p}(\Omega)\right\} \\
&= \sup\left\{\int_\Omega (f + y^*)y - \frac{1}{2}\|y\|^2_{W^{1.p}(\Omega)} : y \in W_0^{1.p}(\Omega)\right\} \\
&= \sup\left\{(f + y^*, y)_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{2}\|y\|^2_{W^{1.p}(\Omega)} : y \in W_0^{1.p}(\Omega)\right\}, \\
&\quad \forall y^* \in W^{-1,q}(\Omega)
\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}
(f + y^*, y)_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)} &\leq \|f + y^*\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \cdot \|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y\|^2_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Rezultă că

$$(f + y^*, y)_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{2}\|y\|^2_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}, \quad \forall y^* \in W^{-1,q}(\Omega)$$

Atunci

$$F^*(y^*) \leq \frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}, \quad \forall y^* \in W^{-1,q}(\Omega)$$

Cum aplicaţia de dualitate $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$ este operator univoc şi bijectiv. Atunci pentru orice element $y^* + f \in W^{-1,q}(\Omega)$ există un unic $\tilde{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $J(\tilde{y}) = y^* + f$ şi $(y^* + f, \tilde{y})_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)} = \|\tilde{y}\|^2_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}$. Deci

$$\begin{aligned}&(f + y^*, \tilde{y})_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\tilde{y}\|^2_{W^{1,p}(\Omega)} = (f + y^* - \frac{1}{2}J(\tilde{y}), \tilde{y})_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)}\\ &= \frac{1}{2}(J(\tilde{y}), \tilde{y})_{W^{-1,q}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}\end{aligned}$$

Obţinem conjugata convexă a lui F

$$F^*(y^*) = \frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}$$

Considerăm acum funcţionala $g = -I_{W_0^{1,p}(\Omega)_+}$ şi folosind definiţia conjugatei concave avem

$$g^\bullet(y^*) = \begin{cases} 0, & y^* \in (W_0^{1,p}(\Omega)_+)^* \\ -\infty, & y^* \notin (W_0^{1,p}(\Omega)_+)^* \end{cases}$$

unde $(W_0^{1,p}(\Omega)_+)^* = \{y^* \in W^{-1,q}(\Omega) : (y, y^*) \geq 0, \forall y \in W_0^{1,p}(\Omega)_+\} = W^{-1,q}(\Omega)_+$.

Cum F şi $-g$ sunt funcţionale convexe şi proprii pe $W^{1,p}(\Omega)$, domeniul de definiţie al lui g este $D(g) = W_0^{1,p}(\Omega)_+$, şi F este continuă peste tot pe $W_0^{1,p}(\Omega)_+$ aplicăm Teorema de dualitate a lui Fenchel (Teorema 1.21, Secţiunea 1.4) şi obţinem

$$\min_{y\in W_0^{1,p}(\Omega)_+}\left\{\frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy\right\} = \max_{y^*\in W^{-1,q}(\Omega)_+}\left\{-\frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}\right\}.$$

Problema duală asociată problemei (2.19) este

$$\max\left\{-\frac{1}{2}\|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} : y^* \in W^{-1,q}(\Omega)_+\right\}.$$

Pentru problema aproximantă (2.20) avem nevoie doar de conjugata concavă a funcţionalei $g_k = -I_{C_k}$ deoarece funcţionala supusă minimizării este tot F peste un alt con. Atunci, conjugata concavă este

$$g_k^\bullet(y^*) = \inf\{(y, y^*) - g_k(y) : y \in C_k\} = \begin{cases} 0, & y^* \in C_k^* \\ -\infty, & y^* \notin C_k^* \end{cases}$$

unde $C_k^* = \{y^* \in W^{-1,q}(\Omega) : (y^*, y) \geq 0, \forall y \in C_k\}$.

Lema 2.1. *Conul polar al lui C_k este*

$$C_k^* = \left\{u = \sum_{i=1}^k \alpha_i\delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0\right\}$$

unde δ_{x_i} sunt distribuţiile Dirac concentrate în $x_i \in \Omega$, adică $\delta_{x_i}(y) = y(x_i)$, $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstraţie. Considerăm

$$\hat{C}_k = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0 \right\}$$

Mai întâi, distribuţiile Dirac δ_{x_i} sunt funcţionale liniare şi continue deoarece $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Astfel rezultă $\hat{C}_k \subset W^{-1,q}(\Omega)$.

Calculăm polara conului $\hat{C}_k$. Conform Definiţiei 1.4 (Secţiunea 1.1.2), avem

$$\hat{C}_k^* = \left\{ y \in W_0^{1,p}(\Omega) : (y, u) \geq 0, \forall u \in \hat{C}_k \right\}.$$

Deoarece

$$(y, u) = (y, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (y, \delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(x_i)$$

şi $\alpha_i \geq 0, \forall i = \overline{1,k}$ obţinem echivalenţa

$$(y, u) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x_i) \geq 0, \quad \forall i = \overline{1,k}.$$

Atunci

$$\hat{C}_k^* = \left\{ y \in W_0^{1,p}(\Omega) : y(x_i) \geq 0, \forall i = \overline{1,k} \right\} = C_k \tag{2.26}$$

Acest lucru implică $(\hat{C}_k^*)^* = C_k^*$.

Cu Teorema bipolarei (Theorem 1.5, Secţiunea 1.1.2), avem

$$\hat{C}_k^{**} = \overline{conv(\hat{C}_k \cup \{0\})}. \tag{2.27}$$

Cum $0 \in \hat{C}_k$ şi conul $\hat{C}_k$ este convex, rămâne de arătat că $\hat{C}_k$ este con închis.

Considerăm $u \in \overline{\hat{C}_k}$. Atunci există un şir $(u_n)_n \in \hat{C}_k$ convergent la u în $W^{-1,q}(\Omega)$. Deoarece $u_n \in \hat{C}_k$, avem

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \delta_{x_i} \to u \ in \ W^{-1,q}(\Omega).$$

Fie $S(x_i, r) \subset \Omega$ astfel încât $x_j \notin S(x_i, r)$, pentru $i \neq j$. Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, alegem $\rho_i \in \mathcal{D}(S(x_i, r)) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ astfel încât $\rho_i(x_i) = 1$. Atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \delta_{x_i}, \rho_j \right) \to (u, \rho_j), \quad \forall j = \overline{1,k}.$$

Obţinem

$$\alpha_j^n \to (u, \rho_j), \quad \forall j = \overline{1,k}.$$

În final, notăm $\alpha_j = (u, \rho_j), \quad \forall j = \overline{1,k}$.

Cu argumentele de mai sus, conchidem că

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_i^n\right) \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i}$$

Rezultă de aici că $u \in \hat{C}_k$. Atunci conul $\hat{C}_k$ este închis.

Atunci relaţia (2.27) se rescrie ca

$$\hat{C}_k^{**} = \hat{C}_k$$

Astfel cu (2.26), obţinem $\hat{C}_k = C_k^*$. □

Cum domeniul lui g_k este $D(g_k) = C_k$ şi funcţionala F rămâne continuă pe conul convex şi închis C_k, ipotezele Teoremei lui Fenchel sunt satisfăcute. Atunci

$$\min_{y\in C_k} \left\{ \frac{1}{2}\|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \right\} = \max_{y^*\in C_k^*} \left\{ -\frac{1}{2}\|y^* + f\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} \right\} \tag{2.28}$$

Obţinem astfel problema duală aproximativă asociată problemei (2.20)

$$\max \left\{ -\frac{1}{2}\|y^* + f\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} : y^* \in C_k^* \right\}. \tag{2.29}$$

Teorema 2.6. *Fie $\bar{y}_k$ soluţia problemei aproximante* (2.20) *şi $\bar{y}_k^*$ soluţia problemei duale aproximantă* (2.29)*. Atunci relaţia dintre cele două soluţii este dată de formula*

$$\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f) \tag{2.30}$$

unde J este aplicaţia de dualitate $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$. Mai mult, $(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k) = 0$.

Demonstraţie. Aplicând Teorema 1.20 (Secţiunea 1.4) obţinem următorul sistem de ecuaţii

$$\bar{y}_k^* \in \partial F(\bar{y}_k), \tag{2.31}$$

$$-\bar{y}_k^* \in \partial I_{C_k}(\bar{y}_k) \tag{2.32}$$

în care funcţionala F este cea definită în (3.20).

Din (2.31), folosind definiţia subdiferenţialei unei funcţii convexe (Definiţia 1.7, Secţiunea 1.1.2) şi Remarca 1.4 (Secţiunea 1.1.2), obţinem $\bar{y}_k^* + f \in J(\bar{y}_k)$. Deoarece aplicaţia de dualitate este operator univoc şi bijectiv, avem că $\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f)$.

Din (2.32), folosind din nou definiţia subdiferenţialei, avem

$$I_{C_k}(\bar{y}_k) - I_{C_k}(z) \le (-\bar{y}_k^*, \bar{y}_k - z), \quad \forall z \in C_k$$

Alegând $z = \frac{1}{2}\bar{y}_k$, rezultă

$$I_{C_k}(\bar{y}_k) \le -(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)$$

Apoi, pentru $z = 2\bar{y}_k \in C_k$, obţinem inegalitatea inversă

$$I_{C_k}(\bar{y}_k) \ge -(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)$$

Dar, ştiind că $\bar{y}_k \in C_k$, concluzionăm

$$(y_k^*, y_k) = 0$$

□

Remarca 2.6. Deoarece $\bar{y}_k^* \in C_k^*$, conform Lemei 2.1, ştim că

$$\bar{y}_k^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \delta_{x_i}$$

unde $\alpha_i^* \geq 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$. Atunci

$$(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k) = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \delta_{x_i}, \bar{y}_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* (\delta_{x_i}, \bar{y}_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \bar{y}_k(x_i)$$

Deci,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0$$

Din nou, cum $\bar{y}_k \in C_k$, avem că $\bar{y}_k(x_i) \geq 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$. Rezultă

$$\alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

Atunci, în concluzie, multiplicatorii lui Lagrange α_i^* sunt nuli dacă $\bar{y}_k(x_i) > 0$ şi pot fi pozitivi doar când restricţia este activă, adică $\bar{y}_k(x_i) = 0$.

2.3 Reducerea la cazul obstacolului nul

Vom discuta o reducere a cazului de obstacol general la cazul obstacolului nul, prezentat anterior. În acest scop, vom demonstra întâi că putem înlocui obstacolul iniţial cu un altul cu valori nule pe $\partial\Omega$, care ulterior, ne permite să efectăm o translaţie la cazul obstacolului nul. Efectuând această translaţie, putem aplica toată teoria dezvoltată în Secţiunea 2.2.

Considerăm următoarea problemă de obstacol

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega f y \ \ : \ y \in K_\psi \right\}, \tag{2.33}$$

unde $K_\psi = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \psi\}$, $\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} \leq 0$ şi $f \in L^2(\Omega)$.

Presupunem că $\partial\Omega$ este de clasă $C^{1,1}$. Mai mult, $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ şi $(\Delta\psi - f)^+ \in H^{-1}(\Omega)$. Sunt verificate ipotezele Teorema 2.4(ii), atunci unica soluţie a problemei (2.33) aparţine lui $H^2(\Omega)$.

Lema 2.2 (Murea şi Tiba [104]). *Fie y_ψ soluţia problemei (2.33) şi $\hat{y}$ soluţia problemei*

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{y} = f, \quad & \text{pe } \Omega\,, \\ \hat{y} = 0, \quad & \text{pe } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.34}$$

Atunci $y_\psi \geq \hat{y}$ aproape peste tot pe Ω. Problema de obstacol asociată lui $\hat{\psi} = \max\{\hat{y}, \psi\} \in H_0^1(\Omega)$ are aceeaşi soluţie y_ψ ca şi problema (2.33).

Demonstraţie. Notând $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ operatorul maximal monoton definit prin

$$\beta(z) = \begin{cases}]-\infty, 0], & z = 0\,, \\ 0, & z > 0\,, \\ \emptyset, & z < 0\,. \end{cases}$$

rescriem (2.33) ca

$$-\Delta y_\psi + \beta(y_\psi - \psi) \ni f \quad \text{in } \Omega\,. \tag{2.35}$$

Atunci, cum $y_\psi \in H^2(\Omega)$, $\beta(y_\psi - \psi) \in L^2(\Omega)$ şi $\beta(y_\psi - \psi) \leq 0$ a.p.t. pe Ω. Prin comparaţia dintre (2.34) şi (2.35), obţinem că $y_\psi \geq \hat{y}$ a.p.t. pe Ω.

Notăm $\hat{K} = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \hat{\psi}\}$. Atunci $y_\psi \in \hat{K}$, $\Delta y_\psi + f \leq 0$ a.p.t. pe Ω.

Pentru orice $v \in \hat{K}$, calculăm

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta y_\psi + f)(v - y_\psi) &= \int_\Omega (\Delta y_\psi + f)(\hat{\psi} - y_\psi) + \int_\Omega (\Delta y_\psi + f)(v - \hat{\psi}) \\ &\leq \int_\Omega (\Delta y_\psi + f)(\hat{\psi} - y_\psi) = 0\,. \end{aligned}$$

Ultima egalitate se datorează formulării clasice a problemei de obstacol (Propoziţia 2.2):

$$\begin{aligned} -\Delta y_\psi &= f, \quad \text{in } \Lambda = \{y_\psi \in \Omega : y_\psi(x) > \psi(x)\}\,, \\ -\Delta y_\psi &\geq f, \quad \text{in } I = \{y_\psi \in \Omega : y_\psi(x) = \psi(x)\}\,, \\ y_\psi &= \psi, \quad \frac{\partial y_\psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad \text{pe } \partial\Lambda \cap \Omega\,, \\ y_\psi &= 0 \quad \text{pe } \partial\Omega \end{aligned}$$

şi faptului că pe I avem $\hat{y}(x) \leq y_\psi(x) = \psi(x)$, deci $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$ şi rezultă $y_\psi(x) = \hat{\psi}(x)$.

Integrând prin părţi obţinem

$$\int_\Omega \nabla y_\psi \nabla (v - y_\psi) \leq \int_\Omega f(v - y_\psi), \quad \forall v \geq \hat{\psi}\,.$$

□

Problema cu obstacol nul pe care o vom folosi este

$$\min_{y \in K_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega f y + \int_\Omega \nabla \hat{\psi} \nabla y \right\}\,. \tag{2.36}$$

unde $K_0 = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq 0 \text{ a.p.t. } \Omega\} = (H_0^1(\Omega)^+$.

Problema admite soluţie unică (conform Corolarului 1.2, Secţiunea 1.5.1), deoarece funcţionala

$$\int_\Omega (fy - \nabla\hat{\psi}\nabla y)$$

este liniară. Fie y_0 acestă soluţie.

Propoziţia 2.4. *Soluţia problemei* (2.33) *se calculează adunând la* y_0 *pe* $\hat{\psi}$*, adică*

$$y_\psi = y_0 + \hat{\psi}\,. \tag{2.37}$$

Demonstraţie. Formularea slabă a problemei (2.36) este

$$\int_\Omega \nabla y_0 \nabla(y_0 - v) \le \int_\Omega f(y_0 - v) - \int_\Omega \nabla\hat{\psi}\nabla(y_0 - v), \quad \forall v \in K_0\,.$$

Trecem ultimul termen din relaţia de mai sus în membrul stâng. Pentru orice $v \in K_0$, avem $v + \hat{\psi} \ge \hat{\psi} \ge \psi$. Cu această translaţie din inegalitatea variaţională obţinem

$$\int_\Omega \nabla(y_0 + \hat{\psi})(\nabla(y_0 + \hat{\psi}) - \nabla(\hat{\psi} + v)) \le \int_\Omega f(y_0 + \hat{\psi} - v - \hat{\psi})\,.$$

Folosind Lema 2.2 rezultă că, prin translaţia cu $\hat{\psi}$, problema (2.36) este echivalentă cu problema (2.33). Atunci concluzionăm că $y_0 + \hat{\psi} = y_\psi$. □

2.4 Metoda de dualitate pentru probleme cu obstacol general

Pentru a aplica rezultatele Secţiunii 2.2 impunem condiţia $p > dim\ \Omega$, deci vom considera că Ω are dimensiunea 1. Astfel ne stabilim în cadrul familiar al spaţiului Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (deci $p = 2$) şi se pot aplica şi rezultatele din Secţiunea 2.3.

Definim $\hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$ prin

$$(\hat{f}, y)_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (fy - \nabla\hat{\psi}\nabla y), \quad \forall y \in H_0^1(\Omega) \tag{2.38}$$

Considerăm problema aproximantă

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 - (\hat{f}, y)_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)},\ :\ y \in C_k\right\}, \tag{2.39}$$

unde $C_k = \{y \in H_0^1(\Omega) : y(x_i) \ge 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$ şi $\{x_i\}_i$ este o mulţime densă în Ω.

Propoziţia 2.5. *Problema* (2.39) *admite soluţia unică* $y_k^0 \in C_k$*.*

Demonstraţia este similară cu cea a Propoziţiei 2.3, deoarece $\hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$ şi toate estimările rămân valabile.

Folosind Teorema de scufundare Sobolev şi slaba semicontinuitate a normei se poate demonstra rezultatul următor, folosind tehnici similare celor din demonstraţia Teoremei 2.5, Secţiunea 2.2.

Corolar 2.1. *Şirul* $\{y_k^0\}_k$ *soluţiilor problemelor* (2.39)*, pentru* $k \in \mathbb{N}$*, este tare convergent în* $H_0^1(\Omega)$ *la unica soluţie* y_0 *a problemei* (2.36)*.*

Aplicând Teorema lui Fenchel problemei (2.39) obţinem problema duală

$$\min\left\{\frac{1}{2}|y^* + \hat{f}|^2_{H^{-1}(\Omega)} \ : \ y \in C_k^*\right\}, \tag{2.40}$$

unde $C_k^* = \{y^* \in H^{-1}(\Omega) : y^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{x_i}, \alpha_i \geq 0\}$ este conul dual.
Remarca 2.7. Fie y_k^* soluţia problemei duale aproximante (2.40). Cum $y_k^* \in C_k^*$, este suficient să calculăm coeficienţii α_i^*, datorită formulei

$$y_k^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i^* \delta_{x_i}\,.$$

Soluţia y_k problemei aproximante (2.20) este calculată folosind egalitatea $y_k^0 = J^{-1}(y_k^* + \hat{f})$ (Teorema 2.6), unde J este aplicaţia de dualitate $J : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ şi de asemenea avem $\alpha_i^* y_k(x_i) = 0, \quad \forall i = \overline{1,k}$.

Obţinem formula pentru soluţia problemei aproximante,

$$y_k^0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^* J^{-1}(\delta_i) + J^{-1}(\hat{f})$$

folosind aici faptul că aplicaţia de dualitate $J : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ este definită prin $J(y) = -y''$.

Atunci aplicând (2.37) găsim soluţia aproximantă a problemei cu obstacol general (2.33).

2.5 Exemple numerice

În această secţiune aplicăm rezultatele teoretice de mai sus pentru a rezolva problema de obstacol (2.19) în dimensiune unu.

Considerăm $\Omega = (-1, 1)$ şi $p = 2$. Problema de obstacol este

$$\min_{y \in H_0^1(\Omega)_+} \left\{\frac{1}{2}|y|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega fy\right\}$$

Folosind Teorema 2.5, scriem problema aproximantă

$$\min_{y \in C_k} \left\{\frac{1}{2}|y|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega fy\right\} \tag{2.41}$$

unde $C_k = \{y \in H_0^1(\Omega) : y(x_i) \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$. Mulţimea $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ este, ca mai sus, mulţime densă în Ω.

Din egalitatea (3.23), rezultă ca problema duală aproximantă este

$$\min \left\{ \frac{1}{2}|y^* + f|^2_{H^{-1}(\Omega)} : y^* \in C_k^* \right\} \tag{2.42}$$

unde $C_k^* = \{y^* \in H^{-1}(\Omega) : y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{x_i}, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Aplicaţia de dualitate, în acest caz, este $J : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ şi este definită prin $J(y) = -y''$. În plus, este operator liniar şi continuu.

Fie $\bar{y}_k$ soluţia problemei (2.41) şi $\bar{y}_k^*$ soluţia problemei (2.42). Atunci, conform Teoremei 2.6, avem

$$\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f). \tag{2.43}$$

Folosind forma elementelor din C_k^* şi faptul că J este liniar, putem rescrie formula de mai sus ca

$$\bar{y}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i J^{-1}(\delta_{x_i}) + J^{-1}(f).$$

Pentru a calcula $J^{-1}(\delta_{x_i})$ considerăm următoarea problemă Cauchy

$$\begin{cases} d_i' = -H_i + a, & \text{pe } (-1, 1) \\ d_i(-1) = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

unde H_i este funcţia Heaviside concentrată în x_i, adică

$$H_i(x) = \begin{cases} 0, & x < x_i \\ 1, & x > x_i \end{cases}$$

Constanta reală a este calculată astfel încât $d_i(1) = 0$.

Atunci obţinem

$$J^{-1}(\delta_{x_i}) = d_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - x_i)(x + 1), & x \leq x_i \\ \frac{1}{2}(1 - x_i)(x + 1) - (x - x_i), & x > x_i \end{cases}$$

Din problema (2.44) deducem că $-d_i'' = H_i' = \delta_{x_i}$.

Calculul lui $J^{-1}(f)$ se reduce la a rezolva problema

$$\begin{cases} -y_f'' = f, & \text{pe } (-1, 1) \\ y_f(-1) = y_f(1) = 0 \end{cases}$$

Folosind egalitatea

$$|\bar{y}_k|^2_{H_0^1(\Omega)} = |\bar{y}_k^* + f|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i J^{-1}(\delta_{x_i}) + J^{-1}(f) \right|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

putem rescrie problema (2.42) astfel

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \Big| \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i + y_f \Big|^2_{H_0^1(\Omega)} : \alpha_i \geq 0 \right\}. \tag{2.45}$$

Definim funcţionala $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$G(\alpha) = \Big| \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i + y_f \Big|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Calculând norma obţinem

$$G(\alpha) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \alpha_j \int_{-1}^1 d_i' d_j' dx + 2 \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{-1}^1 d_i' y_f' dx + \int_{-1}^1 (y_f')^2$$

Notăm

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{-1}^1 d_i' d_j' dx \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, k \\ b_i &= \int_{-1}^1 d_i' y_f' dx \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k \qquad c = \int_{-1}^1 (y_f')^2. \end{aligned}$$

Considerând matricea $A = [a_{ij}]$ şi vectorul $b = [b_i]$, putem scrie

$$G(\alpha) = \alpha^T A \alpha + 2b^T \alpha + c$$

Reiese ca a rezolva problema (2.45) este echivalent cu a rezolva problema de minimizare pătratică

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}_+^k} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^T A \alpha + b^T \alpha \right\} \tag{2.46}$$

Rămâne să calculăm elementele matricei A şi cele ale vectorului b. Obţinem

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + x_i)(1 - x_j), & j > i \\ \frac{1}{2}(1 + x_j)(1 - x_i), & j \leq i \end{cases}$$

şi

$$b_i = y_f(x_i), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

În acest mod, problema calculării coeficienţilor optimali α_i^* ai soluţiei $\bar{y}_k^*$ se poate rezolva cu ajutorul funcţiei Matlab [98] `quadprog`.

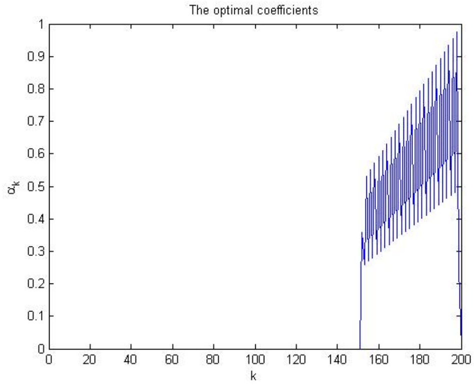


FIGURA 2.1: Coeficienţii $\{\alpha_i^*\}_{i=1}^k$.

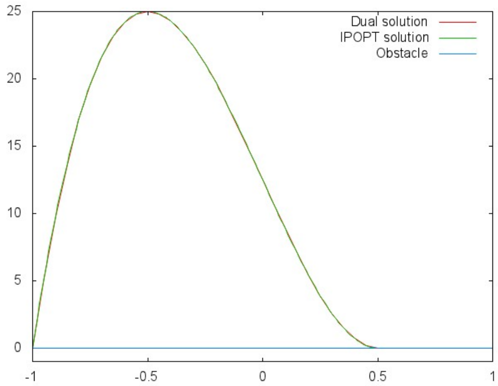


FIGURA 2.2: Soluţia metodei duale şi cea dată de metoda IPOPT sunt identice grafic.

Folosind rezultatul Teoremei 2.6, obţinem soluţia $\bar{y}_k$ problemei aproximante (2.41).

Exemplul 2.1. Considerăm $k = 200$ şi $f = -300x$. Rezolvăm (2.46) şi obţinem coeficienţii α_i^* reprezentaţi în Figura 2.1.

Calculăm soluţia problemei aproximante folosind formula (2.43). În Figura 2.2 reprezentăm soluţia dată de metoda duală şi de cea dată de metoda IPOPT, detaliată în Secţiunea 1.6. Observăm că cele două soluţii sunt indentice grafic.

Exemplul 2.2. În acelaşi mod, rezolvăm problema pe intervalul $\Omega = (0, 1)$. Calculăm din nou funcţiile

$$d_i(x) = \begin{cases} (1 - x_i)x, & x < x_i \\ x_i(1 - x), & x \geq x_i \end{cases}$$

şi elementele lui A şi b sunt, în acest caz,

$$a_{ij} = \begin{cases} x_i(1 - x_j), & j > i \\ x_j(1 - x_i), & i \geq j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

şi $b_i = y_f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$

Luăm din nou $k = 200$ şi considerăm funcţia $f(x) = -300x^3 + 100x$, calculăm coeficienţii optimali rezolvând problema (2.46). Aceştia sunt reprezentaţi în Figura 2.3.

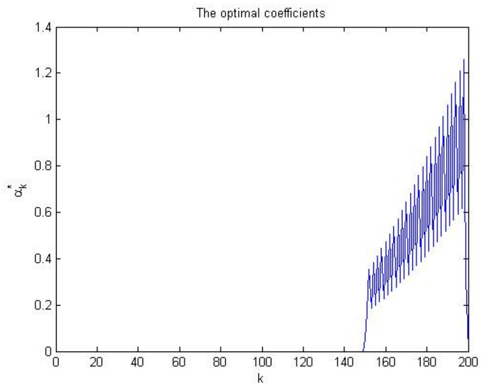


FIGURA 2.3: Coeficienţii $\{\alpha_i^*\}_{i=1}^k$.

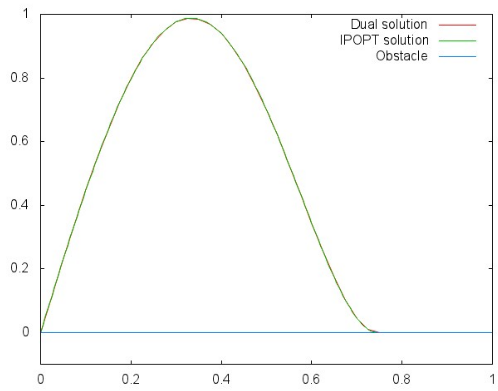


FIGURA 2.4: Comparaţia între soluţia metodei duale şi cea dată de metoda `IPOPT`.

În final, calculând soluţia problema aproximantă în aceeaşi manieră ca mai sus şi obţinem soluţia. În Figura 2.4 reprezenăm soluţia datde metoda de dualitate şi soluţia dată de metoda directă, folosind algoritmul `IPOPT` (Secţiunea 1.6). Soluţiile conincid grafic.

În cele ce urmează vom prezenta câteva exemple numerice pentru problema cu obstacol general (2.33), urmărind metoda de rezolvare discutată în Secţiunea 2.4.

Exemplul 2.3. Considerăm problema de obstacol (2.33) pe $\Omega = (-1, 1)$, în care $\psi \equiv -1/18$ este obstacolul şi

$$f(x) = \begin{cases} -1, & |x| > 1/4\,, \\ 1 - 32x^2, & |x| \le 1/4\,. \end{cases}$$

Soluţia acestei probleme este, conform Ockendon şi Elliott [51], (pp. 93 - 94)

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\left(x \pm \frac{2}{3}\right)^2, & \frac{2}{3} < |x| \le 1\,, \\ -\frac{1}{18}, & \frac{1}{3} \le |x| \le \frac{2}{3}\,, \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\left(x \pm \frac{1}{3}\right)^2, & \frac{1}{4} \le |x| < \frac{1}{3}\,, \\ -\frac{1}{32} + \frac{8}{3}x^2\left(x^2 - \frac{3}{16}\right), & |x| < \frac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Notăm, din nou, $d_i = J^{-1}(\delta_{x_i})$.

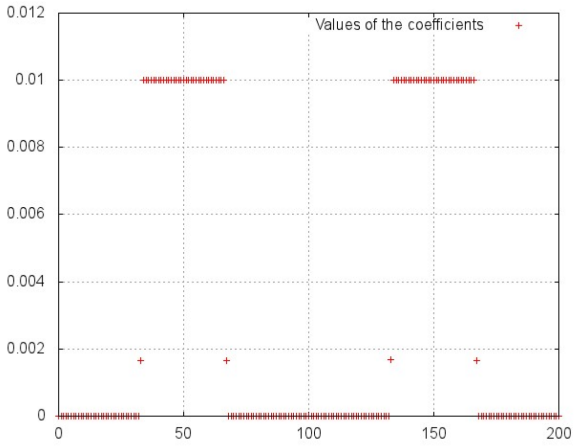


FIGURA 2.5: Coeficienţii $\{\alpha_i^*\}_i$.

În acest exemplu $\hat{f}$ definit în (2.38) este $\hat{f} = f - \hat{\psi}''$. Considerăm $y_{\hat{f}} = J^{-1}(\hat{f})$ soluţia problemei

$$\begin{aligned} -y_f'' &= \hat{f}, \qquad\qquad \text{pe } (-1,1)\,, \\ y_f(-1) &= y_f(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Folosind aceleaşi notaţii, avem $a_{ij} = \int_\Omega d_i' d_j'$, $b_i = \int_\Omega d_i' y_f'$, şi obţinem încă o dată problema de minimizare pătratică echivalentă cu problema duală (2.40)

$$\min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{2} \alpha^T A \alpha + b^T \alpha\,, \tag{2.47}$$

unde $A = [a_{ij}]$ şi $b = [b_i]$.

Avem, ca în Exemplul 2.1, $b_i = y_{\hat{f}}(x_i)$ şi

$$a_{ij} = \begin{cases} 0.5(1+x_i)(1-x_j), & j > i\,, \\ 0.5(1+x_j)(1-x_i), & j \leq i\,. \end{cases}$$

În Figura 2.5 am reprezentat coeficienţii $\{\alpha_i^*\}_{i=1,200}$, adică soluţia problemei (2.47).

Construim soluţia problemei (2.20) folosind Remarca 2.7, apoi aplicăm formula (2.37) şi obţinem soluţia aproximantă a problemei (2.33).

În Figura 2.6 comparăm grafic trei soluţii: cea calculată folosind metoda bazată pe dualitate, soluţia directă calculată cu ajutorul algoritmului de optimizare `IPOPT` şi soluţia exactă dată de Ockendon şi Elliot [51]. Graficele acestor trei soluţii coincid.

Exemplul 2.4. Considerăm acum un exemplu cu obstacol general neconstant:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega f y \ \ : \ y \in K_\psi \right\}, \tag{2.48}$$

unde $K_\psi = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \psi\}$, $\Omega = (-1,1)$, $\psi(x) = -x^2 + 0.5$ şi

$$f(x) = \begin{cases} -10, & |x| > 1/4\,, \\ 10 - x^2, & |x| \leq 1/4\,. \end{cases}$$

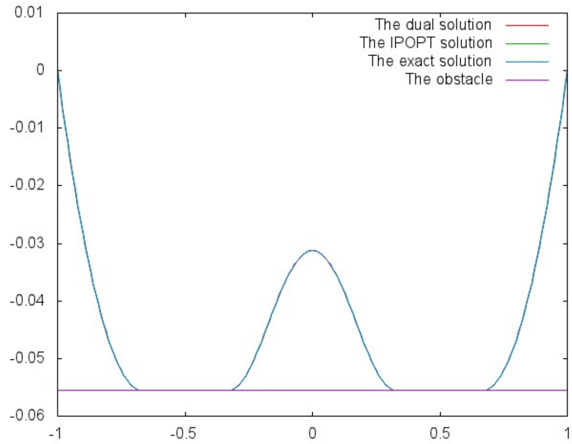


FIGURA 2.6: Soluţia exactă, soluţia duală şi soluţia directă sunt identice grafic.

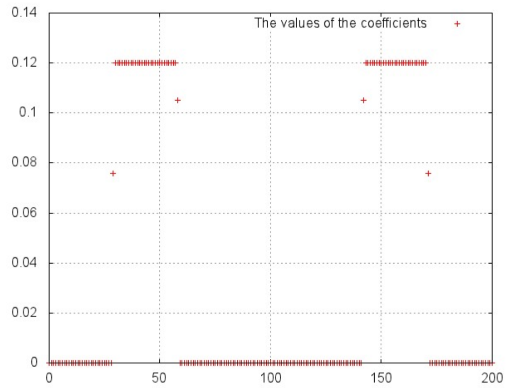


FIGURA 2.7: Coeficienţii $\{\alpha_i^*\}_i$.

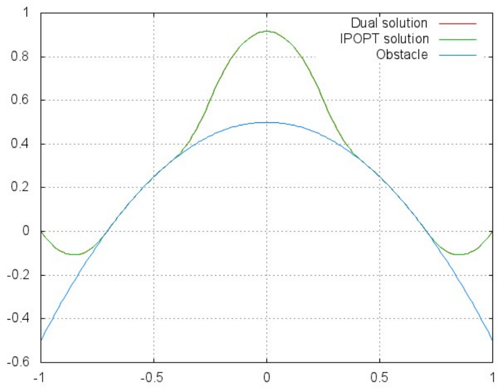


FIGURA 2.8: Soluţia duală şi soluţia `IPOPT` sunt identice grafic.

După rezolvarea problemei de minimizare pătratică (2.47), a cărei soluţie este reprezentată în Figura 2.7, calculăm soluţia problemei aproximante (2.20) folosind Remarca 2.7.

Reprezentăm în Figura 2.8 obstacolul ψ şi două soluţii aproximante, prima calculată cu metoda bazată pe dualitate şi cealaltă calcultată cu metoda `IPOPT`. Cele două soluţii coincid grafic.

Capitolul 3

Probleme de ordin patru

Problema obstacolului pentru operatorul biharmonic este un subiect intens exploatat în cercetarea matematică. Importanţa acestui tip de probleme provine din multiplele sale aplicaţii in teoria elasticităţii şi a mecanicii fluidelor, printre care putem enumera îndoirea barelor şi a plăcilor, probleme de tip Stokes, probleme de frontieră liberă.

Printre numeroasele lucrări care au tratat acestă problemă amintim articolul lui Lovišek [97] care tratează existenţa soluţiilor problemelor duale şi primale, cât şi existenţa punctelor şa ale Lagrangianului asociat. Caffarelli, Friedman şi Torelli [37] studiază problema cu două obstacole pe un domeniu din $\mathbb{R}^n$ cu $n \in \{2, 3\}$ şi cu frontiera de clasă $C^{2+\alpha}$, cu $0 < \alpha < 1$. Se obţine faptul că soluţia aparţine spaţiului $C^{1,1}$, dar nu şi lui C^2, dacă obstacolele sunt funcţii din $C^4(\overline{\Omega})$. Tot problema bidimensională cu două obstacole este tratată în An, Li şi Li [8] folosind o metodă de penalizare.

Mai recent au fost studiate probleme variaţionale pentru plăci cu margini aşezate sau încastrate, Anedda [10], unde se foloseşte o abordare prin rearanjamente ale domeniului. Printre alte lucrari despre acest subiect amintim Landau şi Lifshitz [89], Brezis şi Stampacchia [33], Duvaut şi Lions [50, 94], Glowinski şi al. [133] şi, nu în ultimul rând, Comodi [45].

Din punct de vedere numeric, problema obstacolului pentru operatorul biharmonic este tratată de asemenea în multe articole, care includ o gamă largă de metode de aproximare şi de rezolvare numerică, printre care putem aminti Brenner at al. [28], Al-Said, Noor şi Rassias [6], Peisker [111], An [9], Behrens şi Guzmán [25], Siddiqi, Akram şi Arshad [124]. Poate cel mai relevant pentru aplicaţiile numerice din acest capitol este articolul lui Poullikkas, Karageorghis şi Georgiou [113] în care este implementată metoda soluţiilor fundamentale. Aceată metodă are la bază aproximarea soluţiilor ecuaţiei biharmonice cu o combinaţie liniară de soluţii fundamentale, ale cărei coeficienţi sunt calculaţi astfel încât să fie satisfăcute condiţiile la limită.

Alte articole care abordează problema operatorului biharmonic sunt Chuquipoma, Raposo and Bastos [41], Stenger, Cook şi Kirby [132], Dall'Acqua şi Sweers [47], Arnautu, Langmach, Sprekels şi Tiba [11] sau Meleshko [99].

În acest capitol prezentăm problema obstacolului pentru operatorul biharmonic, începând cu Secţiunea 3.1 care cuprinde rezultate cunoascute cu privire la această problemă, rezultate pe care le vom utiliza în devoltarea algoritmului bazat pe dualitate pentru problema de ordinul patru.

Metodele de dualitate sunt des folosite de către autori pentru a rezolva problemele plăcilor. Amintim articolul lui Yau şi Gao [141] în care este stabilit un principiu generalizat de dualitate, bazat pe o versiune neliniară a teoriei dualităţii lui Rockafellar [118], cu ajutorul căruia se obţine pentru problema de obstacol von Kármán o problemă duală semi-pătratică. Semnalăm că şi alţi autori au folosit abordarea dualităţii, printre care putem aminti lucrările lui Neittaanmaki, Sprekels şi Tiba [107] şi Sprekels şi Tiba [128] în care sunt studiate arcele Kirchhoff-Love, obţinându-se formulele explicite ale soluţiei.

În Secţiunea 3.2 studiem problema plăcii simplu aşezate, considerând pentru început un obstacol nul. Introducem o problema aproximantă, de tipul celei introduse în cazul problemelor de ordinul doi (Secţiunea 2.2.1) şi demonstrăm proprietatea de aproximare a soluţiei problemei continue. Obţinem problemele duale şi o relaţie între soluţiile problemelor aproximante, primale şi duale. Acest caz este mai simplu, având în vedere că, datorită condiţiilor la limită Navier, principiul de maxim este valabil (el rezultând din aplicarea succesivă a principiului de maxim pentru operatorul Laplace). Menţionăm că aceste rezultate au fost publicate în Merluşcă [102].

În Secţiunea 3.3 ne ocupăm de cazul mai dificil al plăcii încastrate pentru care principiul de maxim nu mai e general valabil. Totuşi putem obţine şi în acest caz rezultate similare cu cele obţinute în secţiunile precedente.

Secţiunea 3.4 este dedicată aplicaţiilor numerice aferente teoriei dezvoltate pe parcusul acestui capitol. Discutăm modelarea numerică, diferită de cea prezentată deja în Secţiunea 2.5. Exemplele numerice sunt cu preponderenţă în dimensiune doi.

3.1 Prezentare generală a problemelor de obstacol de ordinul patru

În această secţiune vom prezenta modelarea matematică care conduce la probleme de ordinul patru şi vom enunţa câteva rezultate cunoscute asupra existenţei şi regularităţii soluţiilor.

Considerăm un corp elastic omogen şi izotrop de formă cilindrică care ocupă în spaţiu regiunea

$$\left\{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\right\}, h > 0$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu mărginit.

Teoria liniară a plăcilor rigide conduce la o expresie a energiei totale exprimată în raport cu deplasarea verticală $u = u(x,y)$. Putem astfel scrie funcţionala energie, conform lui Landau şi Lifchitz [89] (pp. 74-79),

$$J(u) = \frac{D}{2h}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\, dy + \frac{T}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy - \int_\Omega Pu\, dx\, dy \tag{3.1}$$

unde $D = h^3E/(1-\nu^2) > 0$ este coeficientul de rigiditate al plăcii (modulul rigidităţii de flexiune) dat în raport cu modulul lui Young E şi raportul ν al lui Poisson, din teoria liniară a elasticităţii, $T > 0$ este o constantă care reprezintă valoarea absolută de solicitare pe unitatea de arie, iar $P = P(x,y)$ reprezintă densitatea forţelor externe pe unitatea de arie.

Primul termen al relaţiei (3.1) reprezintă energia de deformare, iar termenul din mijloc reprezintă energia de solicitare.

Pentru a obţine problema de obstacol pentru echilibrul unei plăci trebuie impuse condiţii la limită. Pentru placa cu marginile încastrate vom impune condiţiile la limită

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{pe } \partial\Omega, \tag{3.2}$$

iar pentru placa simplu aşezată,

$$u = 0, \quad \Delta u = 0, \quad \text{pe } \partial\Omega. \tag{3.3}$$

Considerăm un obstacol ψ continuu pe Ω cu $\psi < 0$ pe $\partial\Omega$ şi introducem mulţimea nevidă şi convexă de deplasări admisibile

$$K = \{v \in V : v \geq \psi \ \text{ pe } \ \Omega\}$$

unde V este spaţiu vectorial de funcţii pentru care funcţionala energie (3.1) este finită şi care ţine cont şi de condiţiile la limită. Pentru placa încastrată $V = H_0^2(\Omega)$, iar pentru cea simplu aşezată $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Luând $\varepsilon = \frac{D}{hT} > 0$ parametrul de rigiditate normalizată şi $f = \frac{P}{T}$, definim funcţionala

$$E_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\, dy + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy - \int_\Omega fu\, dx\, dy,$$

şi formulăm problema obstacolului ca problemă de minim pentru E_ε, adică

$$u \in K : E_\varepsilon(u) \leq E_\varepsilon(v), \quad \forall v \in K \tag{3.4}$$

Propoziţia 3.1 (Rodrigues [119], pp. 7-8)**.** *Inegalitatea variaţionlă*

$$u \in K : \varepsilon \int_\Omega \Delta u \Delta(v-u) dx\, dy + \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) dx\, dy \geq \int_\Omega f(v-u) dx\, dy, \forall v \in K \tag{3.5}$$

este echivalentă cu problema (3.4),

Demonstraţie. Presupunem că u este soluţie a problemei de minimizare (3.4). Atunci

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \left(E_\varepsilon(u + \theta(v-u)) - E_\varepsilon(u) \right) \geq 0$$

Obţinem astfel că

$$\varepsilon \int_\Omega \Delta u \Delta(v-u) dx\, dy + \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) dx\, dy - \int_\Omega f(v-u) dx\, dy \geq 0$$

Reciproc, dacă u verifică inegalitatea variaţională, atunci

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(v) &= E_\varepsilon(u + (v-u)) = E_\varepsilon(u) + \varepsilon \int_\Omega \Delta u \Delta(v-u) + \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) - \int_\Omega f(v-u) \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega (\Delta(v-u))^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla(v-u))^2 \geq E_\varepsilon(u). \end{aligned}$$

În consecinţă u este soluţie a problemei (3.4). □

Pentru o eventuală soluţie continuă u a problemei (3.5) putem defini mulţimea de coincidenţă

$$I = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = \psi(x, y)\}$$

şi complementara ei $\Lambda = \Omega \setminus I$.

Propoziţia 3.2. *Cu notaţiile de mai sus, presupunem că* $u \in H^4(\Omega)$. *Avem*

$$\varepsilon \Delta^2 u - \Delta u = f, \quad \text{in } \Lambda \tag{3.6}$$

şi

$$\varepsilon \Delta^2 u - \Delta u \geq f, \quad \text{in } \Omega \tag{3.7}$$

În plus, avem şi condiţia de complementaritate

$$(u - \psi, \varepsilon \Delta^2 u - \Delta u - f) = 0, \quad \text{in } \Omega \tag{3.8}$$

în sensul măsurilor.

Demonstraţie. Fie $\varphi \in \mathcal{D}(\Lambda)$ arbitrar. Există $\delta_0 > 0$ astfel încât pentru orice $0 < \delta < \delta_0$ avem $v = u \pm \delta\varphi \in K$. Înlocuind în (3.5), obţinem

$$\pm\delta\left(\varepsilon\int_\Omega \Delta u\Delta\varphi - \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f\varphi\right) = \pm\delta\left(\varepsilon\int_\Lambda(\Delta\Delta u - \Delta u - f)\varphi\right) \geq 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Lambda)$$

Atunci obţinem $\varepsilon\Delta^2 u - \Delta u = f$, în Λ.

Considerăm acum $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu $\phi \geq 0$. înlocuim $v = u + \phi \in K$ în (3.5). Avem

$$\varepsilon\int_\Omega \Delta u\Delta\phi - \int_\Omega \nabla u\nabla\phi - \int_\Omega f\phi = \int_\Omega(\Delta\Delta u - \Delta u - f)\phi \geq 0, \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \phi \geq 0.$$

Acest lucru implică faptul că (3.7) are loc.

Conform (3.6)

$$\int_I(\Delta\Delta u - \Delta u - f)(u - \psi) = 0$$

iar din (3.7) avem şi

$$\int_\Lambda(\Delta\Delta u - \Delta u - f)(u - \psi) = 0$$

De aici obţinem (3.8). □

Remarca 3.1. Dacă omitem termenul din mijloc din (3.1) şi considerăm $\varepsilon \equiv 1$, obţinem, din Propoziţia 3.2, modelul cel mai studiat al problemei de obstacol de ordinul al patrulea, şi anume

$$\Delta^2 u = f, \quad \text{pe } \Lambda \tag{3.9}$$
$$\Delta^2 u \geq f, \quad \text{pe } \Omega \tag{3.10}$$
$$u \geq \psi, \quad \text{pe } \Omega \tag{3.11}$$
$$(u - \psi, \Delta^2 u - f) = 0, \quad \text{pe } \Omega \tag{3.12}$$

la care se adaugă condiţiile la limită specifice problemei, (3.2) sau (3.3).

Scriem problema (3.9)–(3.12) sub formă variaţională astfel

$$u \in K : \int_\Omega \Delta u\Delta(v - u) \geq \int_\Omega f(v - u), \forall v \in K \tag{3.13}$$

Teorema 3.1 (Lions, [92], pp. 247-248)**.** *Problema* (3.13) *are soluţie unică.*

În lucrarea lui Caffarelli şi Friedman [36], din 1979, sunt demonstrate rezultate de regularitate asupra soluţiei problemei obstacolului pentru operatorul biharmonic, pe care le vom enunţa fără demonstraţie. Aceste rezultate vor fi folosite în cele ce urmează.

Un prim rezultat demonstrat de către Caffarelli şi Friedman este următorul.

Teorema 3.2. *Dacă $\partial\Omega$ este de clasă $C^{2+\alpha}$, cu $\alpha \in (0,1)$ şi $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ cu $\psi < 0$ pe $\partial\Omega$, există o funcţie w semicontinuă superior cu proprietatea $w = \Delta u$ a.p.t. pe Ω.*

Pe baza acestei teoreme, rezultă că $\Delta u \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ proprietate demonstrată de către Frehse, [59]. Mai mult, se poate demonstra următorul rezultat

Teorema 3.3 (Caffarelli şi Friedman [36]). *Dacă $\psi < 0$ pe $\partial\Omega$, atunci distribuţia $\Delta^2 u$ este o măsură Radon pozitivă definită prin*

$$\int_{\Omega} \zeta d\mu = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta \zeta - f\zeta) d\Omega, \quad \forall \zeta \in V$$

şi a cărei masă este finită, adică $\mu(\Omega) < +\infty$.

Remarca 3.2. Rezultatele obţinute de Caffarelli şi Friedman sunt adevărate în cazurile plăcii încastrate sau simplu aşezate. Un alt rezultat de acest tip a fost obţinut şi de Adams, Hrynkiv şi Lenhart [1], care spune că $\Delta^2 u$ este o măsură Borel pozitivă.

Folosind Teorema 3.3, Pozzolini şi Lèger [115] au obţinut un rezultat de stabilitate, care spune că, în cazuri cu suficientă regularitate, o mică perturbaţie a datelor conduce la o mică perturbaţie a soluţiei. Enunţăm aici rezultatul obţinut pentru problema de obstacol a plăcii încastrate cu condiţiile la limită $u = 1, \partial u/\partial n = 0$, pe $\partial\Omega$.

Teorema 3.4. *Fie Ω este un domeniu mărginit în R^n cu frontiera de clasă C^{∞}. Considerăm $\psi \equiv 0$ şi $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ cu proprietăţile*

(i) *există δ_0 astfel încât $-f \geq \delta_0 > 0$ în Ω;*

(ii) *mulţimea de coincidenţă aferentă datei f, notată cu I_f, este o suprafaţă netedă.*

Atunci, pentru f^0 suficient de aproape de $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, I_f şi I_{f^0} sunt suprafeţe C^{∞}-difeomorfe.

Remarca 3.3. Acest rezultat extinde rezultatul obţinut de Schaeffer [122] şi rezultatul particular demonstrat anterior de Lèger şi Pozzolini [91]. Dar mai important este că rezultatul depinde de faptul că obstacolul este nul. Au loc variaţii instabile ale frontierei libere în cazul în care obstacolul nu este plat, de pildă exemplul considerat de Caffarelli şi Friedman în [36] ilustrează foarte clar comportamentul instabil al mulţimii de necoincidenţă privită în raport cu obstacolul. Prezentarea acestui exemplu necesită următorul rezultat

Corolar 3.1 (Corolarul 8.2, pp. 174, Caffarelli şi Friedman [36]). *Dacă $\Delta^2\psi \geq 0$ în Ω, $\psi < 0$ pe frontiera lui Ω şi dim $\Omega \leq 4$ atunci Λ este o mulţime conexă şi deschisă.*

Exemplu. Presupunem $f \equiv 0$. Considerăm

$$\psi_{\delta}(r) = 1 - \frac{r^2}{2n} + \delta r^4, \quad \delta \leq 0$$

un şir de obstacole în bila de centru O şi rază $\rho > \sqrt{2n}$. Soluţiile corespunzătoare ale problemei de obstacol au simetrie radială. Dacă $\delta = 0$, atunci $\Delta^2\psi_0 \geq 0$ şi $\psi_0(\rho) < 0$. Conform Corolarului 3.1, mulţimea de necoincidenţă este conexă. Rezultă că există un $\alpha_0 > 0$ astfel încât mulţimea de coincidenţă I_0 este formată dintr-o bilă cu raza mai mică decât α_0.

Pe de altă parte, dacă $\delta < 0$, atunci există un $c_\delta > 0$ astfel încât $\Delta^2\psi_\delta \leq -c_\delta$ şi atunci

$$\Delta(\Delta u - \Delta\psi_\delta) = \Delta^2 u - \Delta^2\psi_\delta \geq c_\delta$$

În consecinţă,

$$\int_{B_R} \Delta(u - \psi_\delta) \text{ este strict crescătoare în raport cu } R, \tag{3.14}$$

unde B_R este bila centrată în O şi de rază R. Dacă frontiera liberă conţine două sfere ∂B_{R_1} şi ∂B_{R_2} atunci

$$\int_{\partial B_{R_i}} \Delta(u - \psi_{\delta_i})dx = \int_{\partial B_{R_i}} \frac{\partial}{\partial\nu}(u - \psi)dS = 0, \quad i \in \{1, 2\}$$

dar acest lucru contrazice (3.14). Rezultă astfel că I_δ este formată dintr-o singură sferă ∂B_R, unde I_δ este mulţimea de coincidenţă.

Astfel am demonstrat că, în raport cu obstacolul, pentru un şir de mulţimi de coincidenţă, formate din curbe, la limită se poate obţine un disc.

3.2 Problema plăcii aşezate

În această secţiune discutăm aproximarea inecuaţiei variaţionale de ordinul prin metoda de dualitate.

3.2.1 Existenţă şi aproximare

Considerăm că $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n \leq 3$, este un domeniu mărginit cu proprietatea tare Lipschitz locală. Notăm cu V spaţiul $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_V = \int_\Omega \Delta u \Delta v.$$

Norma

$$|y|_V = \left(\int_\Omega (\Delta y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

este echivalentă cu norma uzuală din spaţiul Sobolev, deoarece conform inegalităţii lui Poincaré, există $c_1 > 0$ astfel încât

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq c_1 \|u\|^2_V$$

şi conform definiţiei normei în spaţii Sobolev (Secţiunea 1.2), există $c_2 > 0$ asifel încât

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \|u\|^2_V$$

V este un spaţiu Hilbert cu norma $|\cdot|_V$.

Extindem metoda bazată pe dualitate prezentată în Capitolul 2 asupra următoarei probleme de obstacol

$$\min_{y\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y)^2-\int_\Omega fy\right\} \tag{3.15}$$

unde $f\in L^2(\Omega)$ şi $K=\{y\in V: y\geq 0 \text{ in } \Omega\}$.

Acesta este un model simplificat al problemei plăcii simplu aşezate, obţinută prin omiterea termenului din mijloc din (3.1).

Conform Teoremei Sobolev (Teorema 1.10, Secţiunea 1.2), şi folosind faptul că $dim\ \Omega\leq 3$, avem $H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\to C(\overline{\Omega})$. Atunci considerăm următoarea problemă aproximantă

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y)^2-\int_\Omega fy \ \ : \ y\in V; y(x_i)\geq 0, i=1,2,\ldots,k\right\} \tag{3.16}$$

unde $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega$ este o mulţime densă în Ω. Pentru orice $k\in\mathbb{N}$, notăm conul închis şi convex

$$C_k=\{y\in V: y(x_i)\geq 0, i=1,2,\ldots,k\}.$$

Propoziţia 3.3. *Următoarele afirmaţii sunt adevarate*

(i) *Problema* (3.15) *are o unică soluţie* $\bar{y}\in K$.

(ii) *Problema* (3.16) *admite soluţia unică* $\bar{y}_k\in C_k$, *pentru orice* $k\in\mathbb{N}$.

Demonstraţie. (i) Conform Teoremei 3.1 şi Propoziţiei 3.1 problema (3.15) admite soluţie unică, pe care o notăm cu $\bar{y}$.

(ii) Considerăm un şir minimizant $\{y_k^m\}_k\in C_k$. Atunci există $M_k>0$ astfel încât

$$\begin{aligned}M_k &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y_k^m)^2-\int_\Omega fy_k^m\\ &\geq \frac{1}{2}|y_k^m|_V^2-\|f\|_{L^2(\Omega)}\|y_k^m\|_{L^2(\Omega)}\\ &\geq \frac{1}{2}|y_k^m|_V^2-c\|f\|_{L^2(\Omega)}|y_k^m|_V\end{aligned}$$

unde $c>0$ este o constantă. Atunci $\{y_k^m\}_m$ este un şir mărginit în V. Deci, conform Propoziţiei 1.2, Secţiunea 1.1.1, există $\bar{y}_k\in V$ astfel încât $y_k^m\to\bar{y}_k$ slab în V. Atunci

$$\begin{aligned}\inf_{y\in C_k}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y)^2-\int_\Omega fy\right\} &= \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y_k^m)^2-\int_\Omega fy_k^m\right\}\\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta\bar{y}_k)^2-\int_\Omega f\bar{y}_k\end{aligned}$$

folosind proprietatea de şir minimizant al lui $\{y_k^m\}_k\in C_k$.

Cum $H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\to C(\overline{\Omega})$, de fapt $y_k^m\to\bar{y}_k$ uniform pe Ω. Şiind că $y_k^m(x_i)\geq 0$, pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,k\}$, obţinem $\bar{y}_k(x_i)\geq 0$, pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,k\}$, adică $\bar{y}_k\in C_k$. Astfel am demonstrat că $\bar{y}_k$ este admisibil pentru problema (3.16) şi deci este soluţie.

Deoarece funcţionala

$$y \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega fy$$

este strict convexă, atunci soluţia $\bar{y}_k \in C_k$ este unică. $\square$

Mai mult, obţinem următorul rezultat de aproximare

Teorema 3.5. *Şirul* $\{\bar{y}_k\}_k$ *al soluţiilor problemelor* (3.16), *pentru* $k \in \mathbb{N}$, *este tare convergent în* V *la unica soluţie* $\bar{y}$ *a problemei* (3.15).

Demonstraţie. Cum $\bar{y} \in K$, avem $\bar{y} \in C_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y})^2 - \int_\Omega f\bar{y} \geq \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y}_k)^2 - \int_\Omega f\bar{y}_k, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Astfel şirul $\{|\bar{y}_k|_V\}_k$ este mărginit, ceea ce implică faptul că $\{\bar{y}_k\}_k \subseteq V$ este slab convergent, pe un subşir, la un element $\hat{y} \in V$.

Deoarece $\bar{y}_k(x_i) \geq 0$ şi $\bar{y}_k \to \hat{y}$ uniform pe $\overline{\Omega}$, atunci pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ avem $\bar{y}_k(x) \to \hat{y}(x)$. Rezultă $\hat{y}(x_i) \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Având în vedere că mulţimea $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ este densă în Ω, avem că $\hat{y} \in K$. Deci, $\hat{y}$ este admisibl pentru problema (3.15).

Cu (3.17) şi slaba semicontinuitate inferioara a normei, trecem la limită

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y})^2 - \int_\Omega f\bar{y} \geq \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \hat{y})^2 - \int_\Omega f\hat{y}.$$

Aşa cum am vazut deja în Propoziţia 3.3, soluţia problemei (2.19) este unică, fapt care implică $\bar{y} = \hat{y}$. Atunci $\bar{y}_k \to \bar{y}$ slab în V.

Pentru a demonstra convergenţa tare, folosim (3.17) pentru a obţine

$$\frac{1}{2}|\bar{y}|_V^2 \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}|y_k|_V^2. \tag{3.18}$$

Apoi, conform slabei semicontinuităţi a normei avem şi inegalitatea inversă

$$\frac{1}{2}|\bar{y}|_V^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}|y_k|_V^2. \tag{3.19}$$

Folosind Propoziţia 1.2, Secţiunea 1.1.1 şi egalitatea dată de relaţiile (3.18) şi (3.19)

$$\frac{1}{2}|\bar{y}|_V^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|y_k|_V^2,$$

rezultă că $\bar{y}_k \to \bar{y}$ tare în V. În plus, deoarece limita este unică, obţinem convergenţa pe tot şirul. $\square$

3.2.2 Problema duală

În această secţiune construim problemele duale continuă şi aproximantă cu ajutorul cărora vom rezolva problema (3.15).

Notăm V^* spaţiul dual al lui $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ echipat cu norma definită în secţiunea precedentă. Observăm că $H^{-2}(\Omega)$ nu este dens în V^*, deoarece nici $H_0^2(\Omega)$ nu este dens în V. Dar incluziunea $H_0^2(\Omega) \subset V$ este continuă, atunci pentru orice $y^* \in V^*$ restricţia $y^*|_{H_0^2(\Omega)}$ aparţine lui $H^{-2}(\Omega)$.

Lema 3.1. *Aplicaţia de dualitate $J : V \to V^*$ poate fi definită prin $J(v) = \Delta\Delta v$.*

Demonstraţie. Pentru orice $v \in V$, considerăm un şir $\{v_n\}_n \subset H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, astfel încât $v_n \to v \in H^2(\Omega)$ şi $\Delta v_n = 0$ pe $\partial\Omega$. Acest lucru este posibil luând v_n ca soluţie unei ecuaţii de ordinul al patru cu condiţii la limită de tip Navier, obţinută dintr-o ecuaţie similară satisfăcută de v în sens slab şi prin regularizarea membrului său drept. Fie $y_n^* = I(v_n)$, unde $I : V \to V^*$ este izomorfismul canonic. Evident, dacă notăm $I(v) = y^*$, obţinem că $y_n^* \to y^*$ tare în V^*. Atunci, folosind Teorema de Reprezentare Riesz, pentru prima egalitate de mai jos, obţinem

$$(y_n^*, y)_{V^* \times V} = \int_\Omega \Delta v_n \Delta y = \int_\Omega (\Delta\Delta v_n) y, \quad \forall y \in V$$

Deci $\Delta\Delta v_n = y_n^*$ converge tare la un element $x \in V^*$. Notăm acest element x cu $\Delta\Delta v$. □

Remarca 3.4. Aplicaţia de dualitate este operator univoc şi bijectiv, şi conform Lemei 3.1, pentru orice $v^* \in V^*$, există $v \in V$ astfel încât $v^* = J(v) = \Delta\Delta v$ şi avem

$$(v^*, y)_{V^* \times V} = \int_\Omega (\Delta\Delta v) y = (v, y)_V = \int_\Omega \Delta v \Delta y, \quad \forall y \in V.$$

Considerăm funcţionala

$$F(y) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y, \quad y \in V. \tag{3.20}$$

Conjugata convexă a lui F este, conform Definiţiei 1.3 (Secţiunea 1.1.2),

$$F^*(y^*) = \sup \left\{ (y^*, y)_{V^* \times V} - \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 + \int_\Omega f y : y \in V \right\}.$$

Cum $f \in L^2(\Omega) \subset V^*$, folosind argumentele de mai sus găsim un unic $y_f \in V$ (de fapt $y_f \in H^4(\Omega)$), care este soluţia tare a problemei

$$\begin{cases} \Delta\Delta y_f = f, \text{pe} \quad \Omega \\ y_f = 0, \Delta y_f = 0, \quad \text{pe} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

astfel ca

$$(f, y)_{V^* \times V} = (J^{-1}(f), y)_V = \int_\Omega \Delta\Delta y_f y = \int_\Omega f y, \quad \forall y \in V.$$

în virtutea Remarcii 3.4.

Atunci

$$F^*(y^*) = \sup\left\{(y^* + f, y)_{V^*\times V} - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta y)^2 : y \in V\right\}.$$

Folosind inegalitatea

$$(y^* + f, y)_{V^*\times V} \leq \frac{1}{2}|y^* + f|^2_{V^*} + \frac{1}{2}|y|^2_V$$

obţinem

$$F^*(y^*) \leq \frac{1}{2}|y^* + f|^2_{V^*}$$

Deoarece aplicaţia de dualitate este bijectivă, pentru orice $y^* + f \in V^*$ există un element $v \in V$ astfel încât

$$|v|^2_V = |y^* + f|^2_{V^*} = (J(v), v)_{V^*\times V}.$$

Atunci

$$(y^* + f, v)_{V^*\times V} - \frac{1}{2}|v|^2_V = \frac{1}{2}|y^* + f|^2_{V^*}.$$

Prin urmare conjugata convexă a lui F este

$$F^*(y^*) = \frac{1}{2}|y^* + f|^2_{V^*}.$$

Considerăm, de asemenea, funcţionala $g = -I_K$. Din definiţia conjugatei concave (Remarca 1.2, Secţiunea 1.1.2) avem

$$g^\bullet(y^*) = \begin{cases} 0, & y^* \in K^* \\ -\infty, & y^* \notin K^* \end{cases}$$

cu $K^* = \{y^* \in V^* : (y, y^*)_{V\times V^*} \geq 0, \forall y \in K\} = (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)_+)^*$.

Putem aplica Teorema lui Fenchel (Teorema 1.21, Secţiunea 1.4), deoarece F şi $-g$ sunt funcţionale convexe şi proprii pe $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, domeniul lui g este $D(g) = K$, iar F este continuă peste tot pe V. Atunci

$$\min_{y\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y})^2 - \int_\Omega fy\right\} = \max_{y^*\in K^*}\left\{-\frac{1}{2}|f + y^*|^2_{V^*} :\right\}.$$

Problema duală asociată problemei (2.19) este

$$\min\left\{\frac{1}{2}|f + y^*|^2_{V^*} : y^* \in K^*\right\}.$$

Calculăm acum conjugata concavă a lui $g_k = -I_{C_k}$ necesară pentru a obţine problema duală asociată problemei aproximante (3.16). Prin Remarca 1.2 (Secţiunea 1.1.2), conjugata concavă este

$$g_k^{\bullet}(y^*) = \inf \{(y, y^*)_{V\times V^*} - g_k(y) : y \in C_k\} = \begin{cases} 0, & y^* \in C_k^* \\ -\infty, & y^* \notin C_k^* \end{cases}$$

unde $C_k^* = \{y^* \in V^* : (y^*, y)_{V^*\times V} \geq 0, \forall y \in C_k\}$.

Lema 3.2. *Fie distribuţiile Dirac concentrate în $x_i \in \Omega$, definite prin $\delta_{x_i}(y) = y(x_i)$, $\forall y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.*

Conul polar al lui C_k este

$$C_k^* = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Demonstraţie. Notăm

$$T = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0 \right\}$$

Distribuţiile Dirac δ_{x_i} sunt funcţionale liniare şi continue pe V datorită faptului că $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, deoarece $dim\ \ \Omega \leq 3$. Rezultă că $T \subset V^*$.

Calculăm polara conului T, care este, conform Definiţiei 1.4 (Secţiunea 1.1.2),

$$T^* = \{y \in V : (y, u)_{V\times V^*} \geq 0, \forall u \in T\}.$$

Observăm că

$$(y, u)_{V\times V^*} = (y, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i})_{V\times V^*} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (y, \delta_{x_i})_{V\times V^*} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(x_i)$$

şi $\alpha_i \geq 0, \forall i = \overline{1,k}$. Aici folosim şi faptul că $T \subset H^{-2}(\Omega)$. Obţinem, astfel, echivalenţa

$$(y, u)_{V\times V^*} \geq 0, \quad \forall u \in T \quad \Leftrightarrow \quad y(x_i) \geq 0, \ \ \forall i = \overline{1,k}.$$

Adică

$$T^* = \left\{ y \in V : y(x_i) \geq 0, \forall i = \overline{1,k} \right\} = C_k.$$

Aplicând polara relaţiei de mai sus, avem $(T^*)^* = C_k^*$.

Teorema Bipolarei (Teorema 1.5, Secţiunea 1.1.2) spune că

$$T^{**} = \overline{conv(T \cup \{0\})}. \tag{3.22}$$

Rămâne de arătat că T este con închis, deoarece este evident că $0 \in T$ şi conul T este convex.

Luăm $u \in \overline{T}$. Atunci există un şir $(u_n)_n \in T$ convergent la u în V^*. Cum $u_n \in T$, avem

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \delta_{x_i} \to u \ in\ V^*.$$

Considerăm $S(x_i, r) \subset \Omega$ astfel încât $x_j \notin S(x_i, r)$, dacă $i \neq j$. Pentru $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, fie $\rho_i \in \mathcal{D}(S(x_i, r)) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ astfel încât $\rho_i(x_i) = 1$. Atunci, convergenţa de mai sus implică

$$\alpha_j^n = \alpha_j^n \rho_j(x_j) = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \delta_{x_i}, \rho_j \right)_{V^* \times V} \to (u, \rho_j)_{V^* \times V}, \quad \forall j = \overline{1, k}.$$

Notăm $\alpha_j = \lim_{n \to +\infty} \alpha_j^n$, independent de ρ_j.

Atunci

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \left(\lim_{n \to \infty} \alpha_i^n \right) \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i}$$

de unde rezultă că $u \in T$.

Atunci T este într-adevăr închis şi, din relaţia (3.22), obţinem

$$T^{**} = T.$$

Atunci $T = C_k^*$, aş cum afirmă enunţul Lemei. $\square$

Cum domeniul lui g_k este $D(g_k) = C_k$ şi funcţionala F este tot continuă pe conul închis şi convex C_k, ipotezele Teoremei lui Fenchel sunt satisfăcute şi

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \ \ : \ y \in C_k \right\} = \max \left\{ -\frac{1}{2} |y^* + f|_{V^*}^2 : y^* \in C_k^* \right\}$$

Scrie problema duală aproximantă asociată problemei (3.16)

$$\min \left\{ \frac{1}{2} |y^* + f|_{V^*}^2 : y^* \in C_k^* \right\}. \tag{3.23}$$

Teorema 3.6. *Considerăm $\bar{y}_k$ soluţia problemei aproximante* (3.16) *şi $\bar{y}_k^*$ soluţia problemei duale aproximante* (3.23). *Atunci*

$$\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f) \tag{3.24}$$

unde J este aplicaţia de dualitate $J : V \to V^*$.

În plus, $(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)_{V^* \times V} = 0$.

Demonstraţie. Obţinem următorul sistem de ecuaţii cu ajutorul Teoremei 1.20 (Secţiunea 1.4)

$$\bar{y}_k^* \in \partial F(\bar{y}_k), \tag{3.25}$$

$$-\bar{y}_k^* \in \partial I_{C_k}(\bar{y}_k) \tag{3.26}$$

unde funcţionala F este cea definită de realţia (3.20).

Folosind Definiţia 1.7, din (3.25), obţinem $\bar{y}_k^* + f \in J(\bar{y}_k)$. Deoarece aplicaţia de dualitate este operator univoc şi bijectiv, avem de fapt $\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f)$.

Relaţia (3.26) implică

$$I_{C_k}(\bar{y}_k) - I_{C_k}(z) \le (-\bar{y}_k^*, \bar{y}_k - z)_{V^* \times V}, \quad \forall z \in C_k$$

Luând $z = \frac{1}{2}\bar{y}_k$ avem

$$I_{C_k}(\bar{y}_k) \le -(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)_{V^* \times V}$$

Şi luând $z = 2\bar{y}_k \in C_k$ obţinem

$$I_{C_k}(\bar{y}_k) \ge -(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)_{V^* \times V}$$

Dar, cum $\bar{y}_k \in C_k$, putem conchide că

$$(y_k^*, y_k)_{V^* \times V} = 0$$

□

Remarca 3.5. Cum $\bar{y}_k^* \in C_k^*$, din Lema 3.2, ştim că

$$\bar{y}_k^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \delta_{x_i} \in H^{-2}(\Omega)$$

unde $\alpha_i^* \ge 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$. Atunci, din Teorema 3.6,

$$0 = (\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)_{V^* \times V} = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \delta_{x_i}, \bar{y}_k)_{V^* \times V} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* (\delta_{x_i}, \bar{y}_k)_{V^* \times V} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \bar{y}_k(x_i)$$

Mai exact,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0$$

Folosind din nou că $\bar{y}_k \in C_k$, iar C_k este con, avem $\bar{y}_k(x_i) \ge 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$. Atunci

$$\alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

În concluzie, multiplicatorii lui Lagrange α_i^* sunt nuli dacă restricţia este inactivă, adică $\bar{y}_k(x_i) > 0$ şi pot fi strict pozitivi în cazul în care se verifică egalitatea dată de restricţie, adică $\bar{y}_k(x_i) = 0$.

3.3 Problema plăcii încastrate

Ne îndreptăm acum atenţia spre problema plăcii cu margini încastrate. Vom dezvolta o teorie similară cu cea expusă în Secţiunea 3.2 pentru acest caz. Există diferenţe faţă de cele prezentate anterior datorită faptului că principiul de maxim nu este valabil pentru condiţiile la limită (3.2), în general.

Considerăm $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n \le 3$, o mulţime deschisă şi mărginită cu proprietatea tare Lipschitz locală. În această secţiune, notăm cu V spaţiul Hilbert $H_0^2(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_V = \int_\Omega \Delta u \Delta v.$$

Studiem problema de obstacol

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \right\} \tag{3.27}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$ şi $\mathcal{K} = \{y \in V : y \geq 0 \text{ in } \Omega\}$.

Problema (3.27) admite soluţia unică $\bar{y} \in \mathcal{K}$, datorită Teorema 3.1, Secţiunea 3.1.

Cu Teorema de scufundare Sobolev (Teorema 1.10, Secţiunea 1.2) şi folosind faptul că $dim\ \Omega \leq 3$, avem $H_0^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, lucru care ne împuterniceşte să considerăm următoarea problemă aproximantă

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \quad : \ y \in V; y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k \right\} \tag{3.28}$$

unde $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ este mulţime densă în Ω. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, considerăm conul închis şi convex

$$\mathcal{C}_k = \{y \in V : y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Propoziţia 3.4. *Problema aproximantă* (3.28) *are soluţia unică* $\bar{y}_k \in \mathcal{C}_k$*, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Considerăm un şir minimizant $\{y_k^m\}_k \in \mathcal{C}_k$. Atunci există $M_k > 0$ astfel încât

$$M_k \geq \frac{1}{2} |y_k^m|_V^2 - c \|f\|_{L^2(\Omega)} |y_k^m|_V$$

unde $c > 0$ este o constantă. Atunci $\{y_k^m\}_k$ este un şir mărginit în V. Deci, conform Propoziţiei 1.2, Secţiunea 1.1.1, există $\bar{y}_k \in V$ astfel încât $y_k^m \to \bar{y}_k$ slab în V. Atunci

$$\inf_{y \in \mathcal{C}_k} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \right\} \quad \geq \quad \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta \bar{y}_k)^2 - \int_\Omega f \bar{y}_k$$

folosind proprietatea de şir minimizant al lui $\{y_k^m\}_k \in \mathcal{C}_k$.

Cum $H^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, de fapt $y_k^m \to \bar{y}_k$ uniform pe Ω. Deoarece că $y_k^m(x_i) \geq 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, avem $\bar{y}_k(x_i) \geq 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, adică $\bar{y}_k \in \mathcal{C}_k$. Atunci $\bar{y}_k$ este soluţie a problemei (3.28).

Deoarece funcţionala

$$y \mapsto \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y$$

este strict convexă, atunci soluţia $\bar{y}_k \in \mathcal{C}_k$ este unică. □

Şi în acest caz, obţinem, similar cu secţiunea precedentă, rezultatul de aproximare

Teorema 3.7. *Şirul* $\{\bar{y}_k\}_k$ *al soluţiilor problemelor* (3.28) *este tare convergent în* V *la unica soluţie* $\bar{y}$ *a problemei* (3.27).

Demonstraţie. Soluţia $\bar{y} \in \mathcal{C}_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deoarece $\bar{y} \in \mathcal{K}$. Atunci, cum $\bar{y}_k$ este soluţia problemei aproximante (3.28), avem

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y})^2 - \int_\Omega f\bar{y} \geq \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y}_k)^2 - \int_\Omega f\bar{y}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Rezultă că şirul $\{|\bar{y}_k|_V\}_k$ este mărginit, ceea ce implică faptul că $\{\bar{y}_k\}_k \subseteq V$ este slab convergent, pe un subşir, la un element $\hat{y} \in V$.

Deoarece $\bar{y}_k(x_i) \geq 0$ şi $\bar{y}_k \to \hat{y}$ uniform pe $\overline{\Omega}$, atunci pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ avem $\bar{y}_k(x) \to \hat{y}(x)$. Rezultă $\hat{y}(x_i) \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Având în vedere că mulţimea $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ este densă în Ω, avem că $\hat{y} \in \mathcal{K}$. Deci, $\hat{y}$ este admisibl pentru problema (3.27).

Luând în calcul slaba semicontinuitate inferioară a normei şi folosind (3.29), obţinem

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \bar{y})^2 - \int_\Omega f\bar{y} \quad \geq \quad \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta \hat{y})^2 - \int_\Omega f\hat{y}.$$

Aşa cum am vazut deja soluţia problemei (3.27) este unică, fapt care implică $\bar{y} = \hat{y}$. Atunci $\bar{y}_k \to \bar{y}$ slab în V.

Pentru a demonstra convergenţa tare, folosim (3.29) pentru a obţine

$$\frac{1}{2}|\bar{y}|_V^2 \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}|y_k|_V^2.$$

Folosind Propoziţia 1.2 (Secţiunea 1.1.1) rezultă că $\bar{y}_k \to \bar{y}$ tare în V. În plus, deoarece limita este unică, obţinem convergenţa pe tot şirul. □

Aplicaţia de dualitate $J : V \to V^*$ poate fi definită prin $J(v) = \Delta\Delta v$.

Problemele duale pentru (3.27) şi (3.28) se obţin în mod similar ca cele din Secţiunea 3.2.2.

Considerăm funcţionala

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega fy, \quad \forall y \in H_0^2(\Omega)$$

a cărei conjugata convexă este

$$F^*(y^*) = \frac{1}{2}|y^* + f|^2_{H^{-2}(\Omega)}$$

Funcţionala $g = -I_\mathcal{K}$ are conjugata concavă

$$g^\bullet(y^*) = \begin{cases} 0, & y \in \mathcal{K}^* \\ -\infty, & y \notin \mathcal{K}^* \end{cases}$$

unde $\mathcal{K}^* = \{y^* \in H^{-2}(\Omega) : (y, y^*) \geq 0, \forall y \in \mathcal{K}\}$ este conul polar al lui $\mathcal{K}$.

Cum F şi $-g$ sunt funcţii convexe, proprii şi semicontinue inferior, iar F este continuă pe domeniu $\mathcal{K}$ al lui g, atunci ipotezele Teoremei lui Fenchel sunt satisfăcute, şi astfel putem obţine problemele duale.

Problema duală continuă este

$$\min \left\{ \frac{1}{2}|f+y^*|^2_{V^*} : y^* \in \mathcal{K}^* \right\}.$$

unde $\mathcal{K}^* = H^{-2}(\Omega)_+$.

Polara conului $\mathcal{C}_k$ este

$$\mathcal{C}_k^* = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0 \right\}$$

unde $\delta_{x_i}(y) = y(x_i)$, $\forall y \in H_0^2(\Omega)$ sunt distribuţiile Dirac concentrate în $x_i \in \Omega$.

Problema duală aproximantă asociată problemei (3.28) este

$$\min \left\{ \frac{1}{2}|y^*+f|^2_{V^*} : y^* \in \mathcal{C}_k^* \right\}. \tag{3.30}$$

Şi în acest caz găsim un rezultat similar cu cel obţinut în cazul plăcii simplu aşezate (Teorema 3.6, Secţiunea 3.2.2).

Teorema 3.8. *Considerăm $\bar{y}_k$ soluţia problemei primale aproximante* (3.28) *şi $\bar{y}_k^*$ soluţia problemei duale aproximante* (3.30)*. Atunci*

$$\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f) \tag{3.31}$$

unde J este aplicaţia de dualitate $J : V \to V^*$.

Mai mult, $(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k) = 0$.

Demonstraţie. Obţinem următorul sistem de ecuaţii cu ajutorul Teoremei 1.20 (Secţiunea 1.4)

$$\bar{y}_k^* \in \partial F(\bar{y}_k), \tag{3.32}$$

$$-\bar{y}_k^* \in \partial I_{\mathcal{C}_k}(\bar{y}_k) \tag{3.33}$$

unde funcţionala F este cea definită de realţia (3.20).

Folosind Definiţia 1.7, din (3.32), obţinem $\bar{y}_k^* + f \in J(\bar{y}_k)$. Deoarece aplicaţia de dualitate este operator univoc şi bijectiv, avem de fapt $\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f)$.

Relaţia (3.33) implică

$$I_{\mathcal{C}_k}(\bar{y}_k) - I_{\mathcal{C}_k}(z) \leq (-\bar{y}_k^*, \bar{y}_k - z)_{V^* \times V}, \quad \forall z \in \mathcal{C}_k$$

Considerând succesiv $z = \frac{1}{2}\bar{y}_k$ şi $z = 2\bar{y}_k \in \mathcal{C}_k$, în relaţia de mai sus obţinem că

$$(y_k^*, y_k)_{V^* \times V} = 0.$$

□

Remarca 3.6. De asemenea putem observa că şi în acest caz este valabilă relaţia de complementaritate

$$\alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

3.4 Aplicaţii numerice şi comparaţia cu alte metode

În această secţiune abordăm implementarea şi modelarea numerică a metodelor prezentate în capitolul curent şi oferim câteva exemple pentru fiecare secţiune în parte.

În spaţiul $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)_V$ dat în Secţiunea 3.2, am vazut că aplicaţia de dualitate $J : V \to V^*$ este definită prin $J(y) = \Delta\Delta y$ şi este operator liniar, univoc şi bijectiv.

Pentru orice $y^* \in C_k^*$

$$|y^* + f|_{V^*}^2 = |J^{-1}(y^* + f)|_V^2 = \Big| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i J^{-1}(\delta_{x_i}) + J^{-1}(f) \Big|_V^2$$

Datorită definiţiei aplicaţiei de dualitate, notăm $\Phi_i = J^{-1}(\delta_{x_i})$, for all $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Cum $\delta_{x_i} \in V^*$, Φ_i sunt soluţii slabe ale problemelor

$$\begin{cases} \Delta\Delta\Phi_i = \delta_{x_i}, & \text{in } \Omega \\ \Phi_i = 0, \Delta\Phi_i = 0, & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{3.34}$$

Am introdus deja $J^{-1}(f) = y_f$ în (3.21), Secţiunea 3.2.2. Atunci

$$|y^* + f|_{V^*}^2 = \Big| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Phi_i + y_f \Big|_V^2$$

Calculând norma, în raport cu produsul scalar pe V, obţinem

$$|y^* + f|_{V^*}^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \alpha_j \int_\Omega \Delta\Phi_i \Delta\Phi_j + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_\Omega \Delta\Phi_i \Delta y_f + \int_\Omega (\Delta y_f)^2$$

Notăm

$$a_{ij} = \int_\Omega \Delta\Phi_i \Delta\Phi_j,\ \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, \quad b_i = \int_\Omega \Delta\Phi_i \Delta y_f,\ i \in \{1, \ldots, k\} \tag{3.35}$$

Atunci problema duală aproximantă este echivalentă cu problema de minimizare pătratică

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \alpha^T A \alpha + b^T \alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k \right\} \tag{3.36}$$

unde $A = [a_{ij}]$ şi $b = [b_i]$.

Calculăm acum a_{ij} şi b_i. Observăm că (3.34) poate fi rescrisă

$$\begin{cases} \Delta\Phi_i = \varphi_i, & \text{in } \Omega \\ \Phi_i = 0, & \text{on } \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta\varphi_i = \delta_{x_i}, & \text{in } \Omega \\ \varphi_i = 0, & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{3.37}$$

Obţinem în acest mod

$$a_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Componentele vectorului b sunt

$$b_i = \int_\Omega \Delta\Phi_i \Delta y_f = \int_\Omega \Delta\Delta\Phi_i y_f = (\delta_{x_i}, y_f)_{V^* \times V} = y_f(x_i).$$

După ce am găsit soluţia $\{\alpha_j^*\}_{j=\overline{1,k}}$ a problemei de minimizare pătratică (3.36) aplicăm formula dată de Teorema 3.6, şi anume

$$\bar{y}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^* \Phi_j + y_f.$$

Exemplul 3.1. Considerăm $\Omega = (-1, 1)$ şi funcţia

$$f(x) = 1680x^4 - 1170x^2 + 90.$$

Ca şi condiţii la limită vom considera cazul barei simplu aşezate. Rezolvăm următoarea problemă

$$\min_{y \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (y'')^2 - \int_\Omega fy \right\}$$

unde $K = \{y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : y \geq 0 \text{ in } \Omega\}$.

În figura 3.1 am reprezentat cele două soluţii (care nu coincid), una calculată folosind noua metodă bazată pe dualitate, pe care am dezvoltat-o în Secţiunea 3.2, cealaltă calculată folosind metoda directă (algoritmul de optimizare neliniară cu restricţii pentru numere mari IPOPT, implementat în $Freefem^{++}$; şi prezentat în cadrul Secţiunii 1.6, Capitolul 1).

Am calculat de asemenea valorile funcţionalei energie pentru cele două soluţii aproximante. Tablelul 3.1 arată că valorile acestei funcţionale sunt mai mici pentru soluţia dată de metoda de dualitate. Acest lucru arată că soluţia găsită cu metoda de dualitate este mai eficientă obţinându-se astfel o valoare optimă mai bună. Astfel aproximarea soluţiei continue a problemei considerată este mai bună în cazul în care se foloseşte metoda de dualitate.

Exemplul 3.2. Luăm Ω discul unitate în $\mathbb{R}^2$ şi considerăm problema de obstacol

$$\min_{y \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega fy \right\} \tag{3.38}$$

unde $K = \{y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : y \geq 0 \text{ in } \Omega\}$ şi $f(x_1, x_2) = 100(-x_1^2 + 3x_1)$.

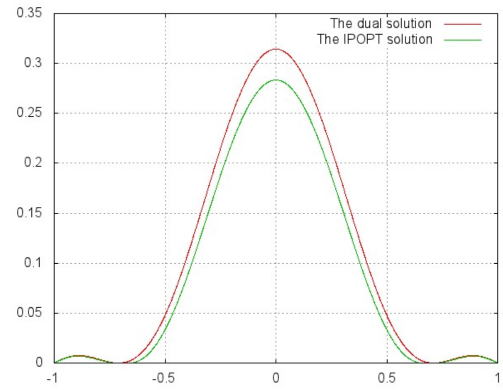


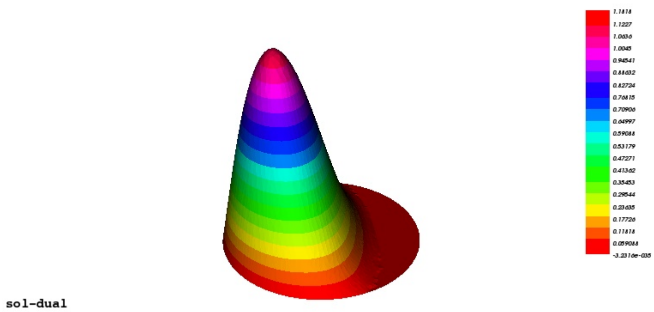
FIGURA 3.1: Comparaţia celor două soluţii.

TABELUL 3.1: Valorile funcţionalei energie pentru diferite discretizări cu k vârfuri ale lui $(-1, 1)$,

k	801	1401	1601	1801	2001
IPOPT	-0.373085	-0.373096	-0.373098	-0.373099	-0.3731
Dual	-0.391613	-0.391625	-0.391626	-0.391627	-0.391628

Calculăm din nou cele două soluţii. Cea obţinută prin metoda de dualitate este reprezentată în Figura 3.2 şi cea dată de metoda directă este reprezentată în Figura 3.3.

FIGURA 3.2: Soluţia obţinută cu ajutorul metodei de dualitate.



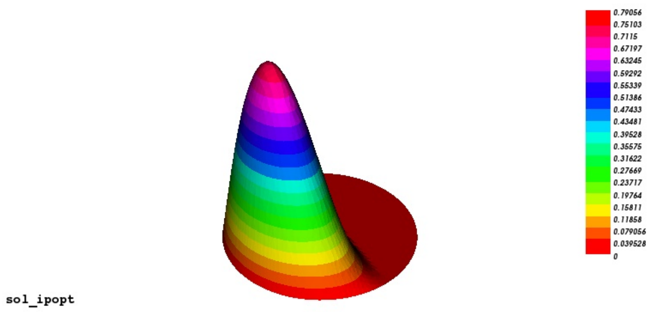


FIGURA 3.3: Soluţia obţinută prin metoda IPOPT.

Am considerat punctele $\{x_i\}_i$, pe care le regăsim în teoria prezentată în Secţiunea 3.2, ca fiind vârfurile reţelei de discretizare. Cele două soluţii au fost calculate considerându-se

TABELUL 3.2: Valorile optime ale funcţionalei energie pentru reţele cu k vârfuri.

k	205	682	1031	1431	1912	2797
IPOPT	-55.8069	-57.9099	-58.168	-58.3493	-58.4457	-58.5392
Dual	-78.0675	-80.5279	-80.8705	-81.113	-81.2397	-81.3977

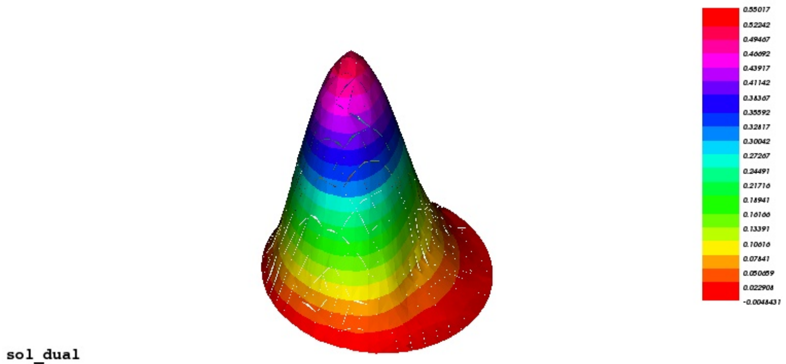


FIGURA 3.4: Solution dată de metoda bazată pe dualitate.

TABELUL 3.3: Valorile optimale ale energiei obţinute pentru diverse valori ale lui k.

k	124	296	541	1031
IPOPT	-5.08766	-4.65127	-4.97532	-4.46879
Dual	-10.8484	-9.85064	-6.91424	-6.78449

aceeaşi reţea cu aceiaşi parameterii de toleranţă prestabiliţi pentru metoda de optimizare IPOPT. Menţionăm că am folosit spaţii de elemente finite duble de tip P1 în calculul ambelor soluţii.

Cu ajutorul Tabelului 3.2 conchidem că, şi în acest exemplu, valorile optime ale funcţionalei energie sunt mai mici atunci când soluţia este calculată prin metoda de dualitate.

Exemplul 3.3. Considerăm Ω discul unitate în $\mathbb{R}^2$ şi problema de obstacol pentru placa încastrată

$$\min_{y\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y)^2-\int_\Omega fy\right\} \tag{3.39}$$

unde $K=\{y\in H^2(\Omega): y\geq 0 \ \text{ in } \ \Omega\}$ şi

$$f(x,y)=-100(-x^2+y).$$

Soluţia calculată prin metoda de dualitate method este reprezentată în Figura 3.4 şi cealaltă, calculată prin metoda directă este reprezentată în Figura 3.5.

Ca mai sus, am calculat valorile optime ale funcţionalei energie. Comparându-le în Tabelul 3.3, observăm că în cazul metodei de dualitate valorile sunt considerabil mai mici.

Este important de adăugat că în cazul plăcii încastrate trebuie folosite spaţii de element finit de tip `Morley`, despre care am discutat în Secţiunea 1.6.

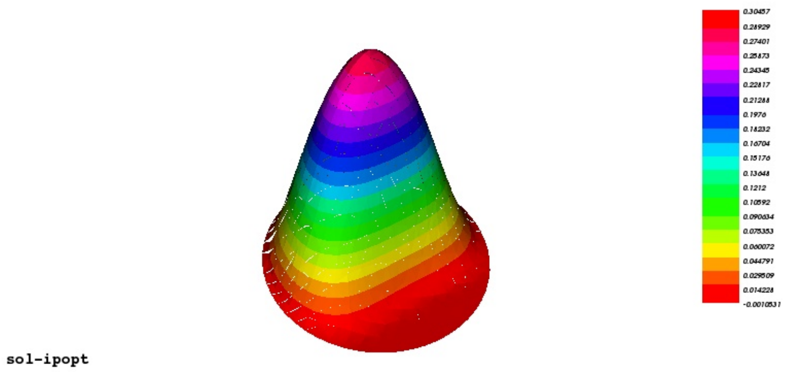


FIGURA 3.5: Soluţia obţinută prin metoda IPOPT.

3.4.1 Aplicaţii numerice pentru problema cu obstacol general

Pe un domeniu cu frontieră tare Lipschitz locală $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n \leq 3$, considerăm $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v, \quad \forall u, v \in V.$$

Conform teoremei de scufundare Sobolev (Teorema 1.10 Secţiunea 1.2), $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$.

Considerăm problema de obstacol

$$\min_{y \in K_\psi} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \right\} \tag{3.40}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$ şi $K_\psi = \{y \in V : y \geq \psi \text{ pe } \Omega\}$, iar $\psi \in H^2(\Omega)$ cu $\psi|_{\partial\Omega} < 0$.

Problema (3.40) admite soluţia unică $y_\psi \in V$. Dacă funcţia ψ este suficient de regulată şi $\psi < 0$ pe $\partial\Omega$, atunci se poate demonstra (Frehse [58]) ca $y_\psi \in H^3(\Omega)$.

Presupunem că $y_\psi \in H^4(\Omega)$. În acest caz formularea tare a problemei de obstacol este (conform Remarcii 3.1)

$$\Delta\Delta y_\psi \geq f, \quad \text{a.p.t } \Omega \tag{3.41}$$

$$y_\psi \geq \psi, \quad \text{a.p.t. } \Omega \tag{3.42}$$

$$(\Delta\Delta y_\psi - f)(y_\psi - \psi) = 0, \quad \text{a.p.t } \Omega \tag{3.43}$$

$$y_\psi = 0, \quad \Delta y_\psi = 0, \quad \text{a.p.t. } \partial\Omega \tag{3.44}$$

Fie soluţia problemei $\hat{y} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta\Delta \hat{y} = f, & \text{în } \Omega \\ \hat{y} = 0, \quad \Delta \hat{y} = 0, & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.45}$$

Atunci $y_\psi \geq \hat{y}$, deoarece în cazul plăcii aşezate se poate aplica principiul de maxim. Construim acum $\hat{\psi} = \max\{\hat{y}, \psi\} \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Considerăm $\hat{K} = \{v \in V : v \geq \hat{\psi}\}$ şi observăm că $y_\psi \in \hat{K}$. Avem

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\Delta\Delta y_\psi - f)(v - y_\psi) &= \int_\Omega (\Delta\Delta y_\psi - f)(\hat{\psi} - y_\psi) + \int_\Omega (\Delta\Delta y_\psi - f)(v - \hat{\psi}) \\ &\geq \int_\Omega (\Delta\Delta y_\psi - f)(\hat{\psi} - y_\psi), \quad \forall v \in \hat{K}\end{aligned}$$

Cu (3.43), avem $\Delta\Delta y_\psi = f$ sau $y_\psi = \psi$ a.p.t. Ω. În cel de-al doilea caz, cum $y_\psi \geq \hat{y}$, avem $\hat{\psi} = y_\psi$. Rezultă

$$\int_\Omega (\Delta\Delta y_\psi - f)(\hat{\psi} - y_\psi) = 0$$

Deci,

$$\int_\Omega (\Delta\Delta y_\psi - f)(v - y_\psi) \geq 0, \quad \forall v \in \hat{K}$$

Integrând prin părţi, avem

$$\int_\Omega \Delta y_\psi \Delta(v - y_\psi) \geq \int_\Omega f(v - y_\psi), \quad \forall v \in \hat{K}$$

Deci problema (3.40) are aceeaşi soluţie y_ψ dacă înlocuim ψ cu $\hat{\psi}$. Avantajul folosirii lui $\hat{\psi}$ în calculul lui y_ψ este că $\hat{\psi}$ are urmă nulă pe frontieră.

Putem să regularizăm obstacolul $\hat{\psi}$ prin funcţiile $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ cu proprietăţile $\psi_\varepsilon \to \hat{\psi}$ uniform pe Ω şi $\psi_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$.

Notăm $K_\varepsilon = \{v \in V : v \geq \psi_\varepsilon\}$ şi considerăm problema regularizată

$$\min_{y \in K_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \right\} \tag{3.46}$$

Reducem acum problema (3.46) la problema de obstacol nul, pentru a aplica metoda bazată pe dualitate. Aplicăm o translaţie problemei. Vom folosi pentru aceasta inegalitatea variaţională

$$\int_\Omega \Delta y_\varepsilon \Delta(y_\varepsilon - v) \geq \int_\Omega f(y_\varepsilon - v), \quad \forall v \in K_\varepsilon$$

Atunci

$$\int_\Omega \Delta y_\varepsilon \Delta(y_\varepsilon - v) - \int_\Omega \Delta\psi_\varepsilon \Delta(y_\varepsilon - v) \geq \int_\Omega f(y_\varepsilon - v) - \int_\Omega \Delta\psi_\varepsilon \Delta(y_\varepsilon - v), \quad \forall v \in K_\varepsilon$$

Obţinem, pentru orice $v \in K_\varepsilon$,

$$\int_\Omega \Delta(y_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\Delta(y_\varepsilon - \psi_\varepsilon - (v - \psi_\varepsilon)) \geq \int_\Omega f(y_\varepsilon - \psi_\varepsilon - (v - \psi_\varepsilon)) - \int_\Omega \Delta\psi_\varepsilon \Delta(y_\varepsilon - \psi_\varepsilon - (v - \psi_\varepsilon)).$$

Notăm $K_0 = \{v \in V : v \geq 0 \text{ a.p.t. pe } \Omega\}$. Atunci $\forall v \in K_\varepsilon$, avem $u = v - \psi_\varepsilon \in K_0$. Fie $y_0 = y_\varepsilon - \psi_\varepsilon$. Atunci

$$\int_\Omega \Delta y_0 \Delta(y_0 - u) \geq \int_\Omega f(y_0 - u) - \int_\Omega \Delta\psi_\varepsilon \Delta(y_0 - u), \quad \forall u \in K_0 \tag{3.47}$$

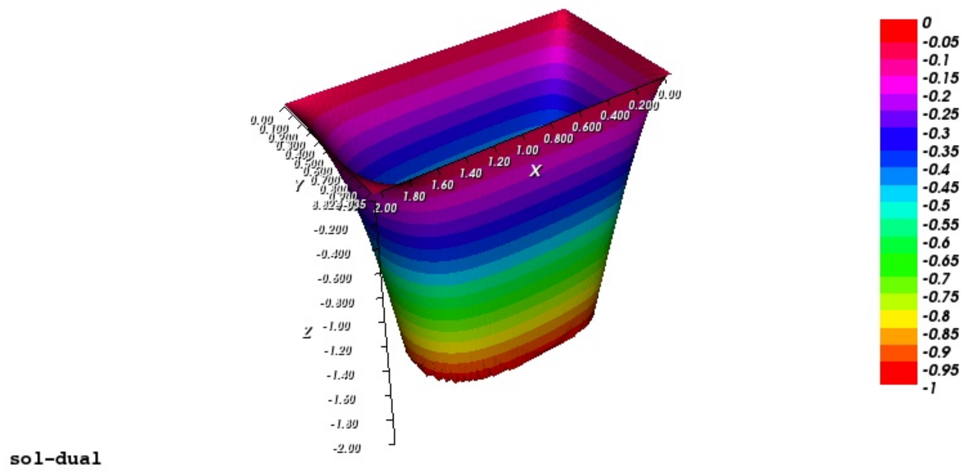


FIGURA 3.6: Soluţia obţinută prin metoda de dualitate.

Astfel soluţia y_ε problemei (3.46) este egală cu suma dintre soluţia y_0 a problemei (3.47) şi ψ_ε.

Aplicăm metoda de rezolvare bazată pe dualitate problemei (3.47). Considerăm problema aproximantă

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y)^2-\int_\Omega fy+\int_\Omega\Delta\psi_\varepsilon\Delta y\quad:\ y\in V; y(x_i)\geq 0, i=1,2,\dots,k\right\}\tag{3.48}$$

unde $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega$ este o mulţime densă în Ω. Pentru orice $k\in\mathbb{N}$, notăm conul închis şi convex $C_k=\{y\in V: y(x_i)\geq 0, i=1,2,\dots,k\}$.

Problema (3.48) admite soluţie unică $\bar{y}_k^0$, iar şirul acestor soluţii converge tare la y_0 în V.

În aplicaţia numerică, am considerat $\{x_i\}_i$ nodurile reţelei de discretizare, pe care am rafinat-o succesiv.

Aplicând metoda bazată pe dualitate problemei (3.48), obţinem soluţia problemei (3.46) prin adunarea lui ψ_ε soluţiei $\bar{y}_k^0$. Am introdus prin acest procedeu soluţia aproximativă a problemei (3.40).

Exemplul 3.4. Considerăm o placă aşezată bidimensională care ocupa domeniul $\Omega=(0,2)\times(0,1)$ în plan. Luăm $f(r)=-100(-5r^2+7r+2)$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Pentru primul exemplu, am considerat un obstacol constant, nenul, $\psi(r)=-1$.

Rezprezentăm soluţia obţinută prin metoda bazată pe dualitate în figura 3.6. Pentru comparaţie reprezentăm şi soluţia obţinută prin metoda directă (folosind algoritmul IPOPT) în Figura 3.7.

Cele două grafice nu sunt identice. Calculând valoarea energiei pentru cele două soluţii obţinute în Tabelul 3.4, observăm că valorile sunt mai mici în cazul metodei de dualitate.

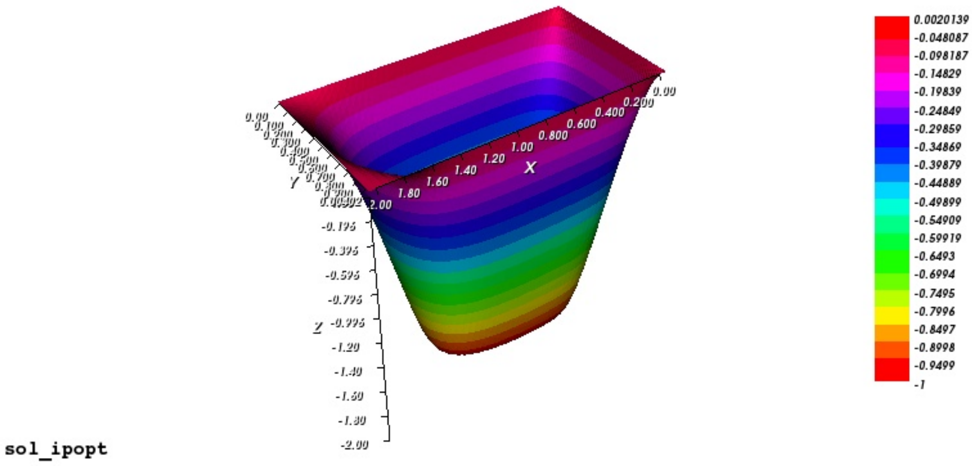


FIGURA 3.7: Soluţia obţinută prin metoda directă.

TABELUL 3.4: Valorile optimale ale energiei obţinute pentru diverse valori ale lui k.

k	441	961	1681	2601
IPOPT	-152.299	-153.154	-153.492	-153.608
Dual	-187.057	-188.251	-188.706	-188.952

Exemplul 3.5. Considerăm $\Omega = (0,2) \times (0,1)$ şi luăm $f(r) = -10(-2r^2 + 20r - 2)$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi obstacolul $\psi(r) = -r^2 + 2r - 1.5$.

Reprezentăm soluţia obţinută prin dualitate în Figura 3.8, iar în Figura 3.9 soluţia obţinută cu metoda de optimizare `IPOPT`.

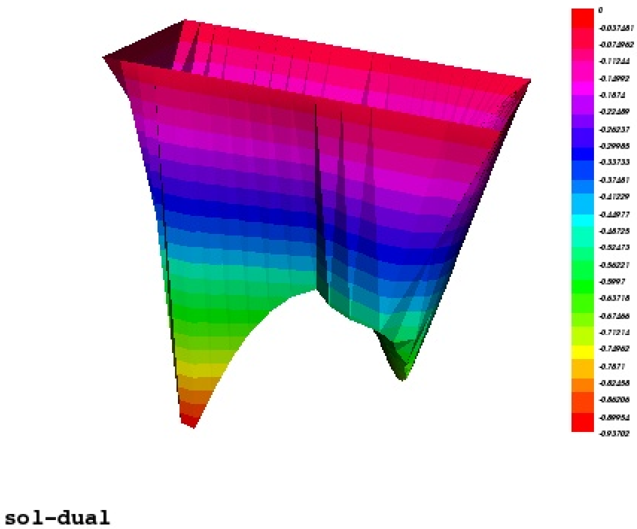
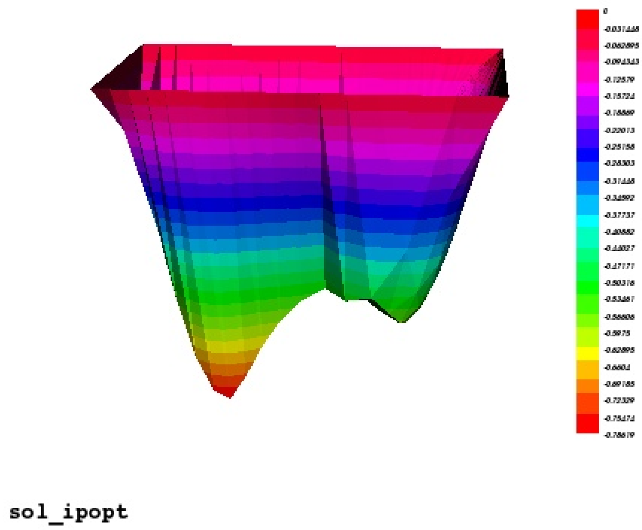


FIGURA 3.8: Soluţia obţinută prin metoda de dualitate.

FIGURA 3.9: Soluţia obţinută prin metoda directă.



TABELUL 3.5: Valorile optimale ale energiei obţinute pentru diverse valori ale lui k.

k	322	484	716	1430	1920	2568
IPOPT	-105.675	-108.804	-107.047	-104.101	-103.9	-103.802
Dual	-118.551	-121.568	-121.447	-118.268	-118.135	-118.143

Deşi soluţiile sunt diferite grafic, Tabelul 3.5 arată că, în cazul metodei bazată pe dualitate, valorile optimale ale funcţionalei energie sunt mai mici decât în cazul soluţiei obţinute prin metoda de optimizare `IPOPT`.

Bibliografie

[1] D. R. Adams, V. Hrynkiv, and S. Lenhart. Optimal control of a biharmonic obstacle problem. In Ari Laptev, editor, *Around the Research of Vladimir Maz'ya III*, volume 13 of *International Mathematical Series*, pages 1–24. Springer New York, 2010.

[2] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Acad. Press, New York, London, Torento, 1975.

[3] R. A. Adams and J. J.F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic Press, 2003.

[4] A. Addou, J. Zahi, et al. Regularization of a unilateral obstacle problem on the boundary. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(4):241–250, 2003.

[5] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1965.

[6] E. A. Al-Said, M. A. Noor, and T. M. Rassias. Cubic splines method for solving fourth-order obstacle problems. *Applied mathematics and computation*, 174(1):180–187, 2006.

[7] Ya.I. Alber. The regularization method for variational inequalities with nonsmooth unbounded operators in banach space. *Applied Mathematics Letters*, 6(4):63 – 68, 1993.

[8] Li K. An, R. and Y. Li. Solvability of the 3d rotating Navier–Stokes equations coupled with a 2d biharmonic problem with obstacles and gradient restriction. *Applied Mathematical Modelling*, 33:2897–2906, 2009.

[9] R. An. Discontinuous Galerkin finite element method for the fourth-order obstacle problem. *Applied Mathematics and Computation*, 209(2):351–355, 2009.

[10] C. Anedda. Maximization and minimization in problems involving the bi-Laplacian. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 190(1):145–156, 2011.

[11] V. Arnautu, H. Langmach, J. Sprekels, and D. Tiba. On the approximation and the optimization of plates. *Numerical functional analysis and optimization*, 21(3-4):337–354, 2000.

[12] V. Arnăutu and P. Neittaanmäki. *Optimal control from theory to computer programs*. Springer, 2003.

[13] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, 19(4):742–760, 1982.

[14] H. Attouch and Brézis H. Duality for the sum of convex functions in general banach spaces. In Jorge Alberto Barroso, editor, *Aspects of Mathematics and its Applications*, volume 34 of *North-Holland Mathematical Library*, pages 125 – 133. Elsevier, 1986.

[15] O. Axelsson and V. A. Barker. *Finite element solution of boundary value problems: theory and computation*. Academic Press, Orlando, Florida, 1984.

[16] M. B. Ayed and K. E. Mehdi. On a biharmonic equation involving nearly critical exponent. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 13(4):485–509, 2006.

[17] D. Azé. Duality for the sum of convex functions in general normed spaces. *Archiv der Mathematik*, 62(6):554–561, 1994.

[18] Rizwan B. Penalty method for variational inequalities. *Advances in Applied Mathematics*, 18(4):423 – 431, 1997.

[19] L. Badea. One- and two-level domain decomposition methods for nonlinear problems. *Proceedings of the First International Conference on Parallel, Distributed and Grid Computing for Engineering*, (6), 2009.

[20] C. Baiocchi. Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica. *Annali di matematica pura ed applicata*, 92(1):107–127, 1972.

[21] V. Barbu. *Optimal control of variational inequalities*. Research notes in mathematics. Pitman Advanced Pub. Program, 1984.

[22] V. Barbu and Th. Precupanu. *Convexity and optimization in* B*anach spaces*. Editura Academiei, Bucureşti, 1978.

[23] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and Ch. M. Shetty. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. John Wiley and Sons, New York, 2013.

[24] H. Begehr. Dirichlet problems for the biharmonic equation. *Gen. Math*, 13:65–72, 2005.

[25] E. M. Behrens and J. Guzmán. A mixed method for the biharmonic problem based on a system of first-order equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(2):789–817, 2011.

[26] M. Biroli. A de Giorgi-Nash-Moser result for a variational inequality. *Boll. UMI*, 16(5):598–605, 1979.

[27] L. Boccardo. Régularité $W_0^{1,p}$, $(2 < p < +\infty)$ de la solution d'un problème unilatéral. In *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, volume 3, pages 69–74. Université Paul Sabatier, 1981.

[28] S. C. Brenner, L. Sung, H. Zhang, and Y. Zhang. A Morley finite element method for the displacement obstacle problem of clamped kirchhoff plates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 254:31–42, 2013.

[29] H. Brézis. Seuil de régularité pour certains problèmes unilatéraux. *C. R. Acad. Sci*, 273:35–37, 1971.

[30] H. Brézis. *Functional analysis,* S*obolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York, 2011.

[31] H. Brézis and G. Stampacchia. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96:153–180, 1968.

[32] H. Brezis and G. Stampacchia. The hodograph method in fluid-dynamics in the light of variational inequalities. In Paul Germain and Bernard Nayroles, editors, *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, volume 503 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 239–257. Springer Berlin Heidelberg, 1976.

[33] H. Brezis and G. Stampacchia. Remarks on some fourth order variational inequalities. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 4(2):363–371, 1977.

[34] M. Burger, N. Matevosyan, and M.-T. Wolfram. A level set based shape optimization method for an elliptic obstacle problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(04):619–649, 2011.

[35] R. H. Byrd, G. Liu, and J. Nocedal. On the local behavior of an interior point method for nonlinear programming. *Numerical analysis*, 1997:37–56, 1997.

[36] L. A. Caffarelli and A. Friedman. The obstacle problem for the biharmonic operator. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 6(1):151–184, 1979.

[37] L. A Caffarelli, A. Friedman, A. Torelli, et al. The two-obstacle problem for the biharmonic operator. *Pacific Journal of Mathematics*, 103(2):325–335, 1982.

[38] L.A. Caffarelli. The obstacle problem revisited. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(4-5):383–402, 1998.

[39] J. Céa. *Optimisation:* T*héorie et algorithmes.* Dunod, Paris, 1971.

[40] M. Chicco. Appartenenza ad $W^{1,p}(\omega)$, $(2 < p < +\infty)$ delle soluzioni di una classe di disequazioni variazionali ellittiche. *Bollettino Della Unione Matematica Italiana*, 3(3-B):137–148, 1984.

[41] J.A.D. Chuquipoma, C.A. Raposo, and W.D. Bastos. Optimal control problem for deflection plate with crack. *Journal of dynamical and control systems*, 18(3):397–417, 2012.

[42] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* Elsevier, 1978.

[43] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[44] Philippe G Ciarlet. *Numerical analysis of the finite element method.* Les Presses de L'Université de Montréal, 1976.

[45] M.I. Comodi. Approximation of a bending plate problem with a boundary unilateral constraint. *Numerische Mathematik*, 47(3):435–458, 1985.

[46] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. *Trust Region Methods.* MOS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[47] A. Dall'Acqua and G. Sweers. The clamped-plate equation for the Limaçon. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 184(3):361–374, 2005.

[48] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains.* Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[49] Z. Dostál. *Optimal quadratic programming algorithms: with applications to variational inequalities*, volume 23. Springer, 2009.

[50] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, volume 18. Dunod Paris, 1972.

[51] C. M. Elliott and J. R. Ockendon. *Weak and variational methods for moving boundary problems*, volume 59. Pitman Boston, 1982.

[52] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, volume 4. Siam, Philadelphia, PA. Reprint of the 1968 original., 1990.

[53] G. Fichera. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno, atti acc. *Naz. Lincei, Memoria presentata il*, 1964.

[54] G. Fichera. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. In *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*, pages 391–424. Springer, 1973.

[55] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization.* John Wiley Sons, Ltd, 2000.

[56] A. Forsgren, P. E. Gill, and M. H. Wright. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM review*, 44(4):525–597, 2002.

[57] P. Forsyth and K. Vetzal. Quadratic convergence for valuing american options using a penalty method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(6):2095–2122, 2002.

[58] J. Frehse. Zum differenzierbarkeitsproblem bei variationsungleichungen höherer ordnung. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36(1):140–149, 1971.

[59] J. Frehse. On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality. *Manuscripta Mathematica*, 9(1):91–103, 1973.

[60] J. Frehse. On the smoothness of solutions of variational inequalities with obstacles. *Banach Center Publications*, 10(1):87–128, 1983.

[61] A. Friedman. *Variational Principles and Free Boundary Problems.* Wiley, New York, 1982.

[62] D. Gabay and B. Mercier. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2(1):17–40, 1976.

[63] F. Gazzola, H.-C. Grunau, and G. Sweers. *Polyharmonic boundary value problems: positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains.* Number 1991. Springer, 2010.

[64] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, and M. Squassina. Existence and nonexistence results for critical growth biharmonic elliptic equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 18(2):117–143, 2003.

[65] C. Gerhardt. Hypersurface of prescriped mean ccurvature over obstacles. *Math Z.*, 133:169–185, 1973.

[66] M. Giaquinta and L. Pepe. Esistenza e regolarità per il problema dell'area minima con ostacoli in n variabili. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 3(25):481–507, 1971.

[67] P.E. Gill, W. Murray, and M.H. Wright. *Practical optimization.* Academic Press, 1981.

[68] E. Giusti. Superfici minime cartesiane con ostaeoli diseontinui. *Arch. rat. Mech. Analysis*, 35:47–82, 1969.

[69] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*, volume 4. Springer, 1984.

[70] N. I.M. Gould, D. Orban, A. Sartenaer, and P. L. Toint. Superlinear convergence of primal-dual interior point algorithms for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 11(4):974–1002, 2001.

[71] R. Griesse and K. Kunisch. A semi-smooth Newton method for solving elliptic equations with gradient constraints. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(02):209–238, 2009.

[72] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, MA, 1985.

[73] I. Griva, S. G. Nash, and A. Sofer. *Linear and nonlinear optimization.* Siam, 2009.

[74] P. Hartman and G. Stampacchia. On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.*, 115:271–310, 1966.

[75] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. *Introduction to Shape Optimization.* SIAM, Philadelphia, PA, 2003.

[76] F. Hecht. New development in Freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.

[77] M.R. Hestenes. Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4(5):303–320, 1969.

[78] M. Hintermüller and S. Rösel. A duality-based path-following semismooth Newton method for elasto-plastic contact problems. IFB-Report 70, Institute of Mathematics and Scientific Computing, University of Graz, 09 2013.

[79] K. Ito and K. Kunisch. Semi–smooth newton methods for variational inequalities of the first kind. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(01):41–62, 2003.

[80] K. Ito and K. Kunisch. *Lagrange multiplier approach to variational problems and applications*. Advances in design and control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[81] V. V. Karachik and S. Abdoulaev. On the solvability conditions for the Neumann boundary value problem. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(4):680–690, 2013.

[82] V.V. Karachik, B. Kh. Turmetov, and A. Bekaeva. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. *Int. J. Pure Appl. Math*, 81(3):487–495, 2012.

[83] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. ACM, 1984.

[84] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications*. Wiley New York, 1989.

[85] D. Kinderlehrer. The coincidence set of solutions of certain variational inequalities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 40(3):231–250, 1971.

[86] D. Kinderlehrer. Variational inequalities with lower dimensional obstacles. *Israel Journal of Mathematics*, 10(3):339–348, 1971.

[87] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications*, volume 31. Siam, 2000.

[88] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492, Berkeley, Calif., 1951. University of California Press.

[89] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, J.B. Sykes, W.H. Reid, and E. H. Dill. Theory of elasticity: Vol. 7 of course of theoretical physics. *Physics Today*, 13(7):44–46, 2009.

[90] H. Lewy and G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(2):153–188, 1969.

[91] A. Léger and C. Pozzolini. Sur la zone de contact entre une plaque élastique et un obstacle rigide. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3):144 – 149, 2007.

[92] J. L. Lions. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*. Dunod Paris, 1969.

[93] J. L. Lions and G. Stampacchia. Variational inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(3):493–519, 1967.

[94] J.L. Lions and G. Duvaut. *Inequalities in mechanics and physics.* Springer, 1976.

[95] F. A Lootsma. Hessian matrices of penalty functions for solving constrained-optimization problems. *Philips Res. Rep.*, 24:322–330, 1969.

[96] A. E. H. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society (London), Série A*, vol. 179(17):491–546, January 1888.

[97] J. Lovíšek. Duality in the obstacle and unilateral problem for the biharmonic operator. *Aplikace matematiky*, 26(4):291–303, 1981.

[98] MATLAB. *version 7.10.0 (R2010a).* The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2010.

[99] V.V. Meleshko. Biharmonic problem in a rectangle. *Applied Scientific Research*, 58(1-4):217–249, 1997.

[100] D. R. Merluşcă. A duality algorithm for the obstacle problem. *Annals of the Academy of Romanian Scientists*, 5(1–2):209–215, 2013.

[101] D. R. Merluşcă. A duality-type method for the obstacle problem. *Analele Şiintifice Univ. Ovidius Constanţa*, 21(3):181–195, 2013.

[102] D. R. Merluşcă. A duality-type method for the fourth order obstacle problem. *U.P.B. Sci. Bull., Series A.*, 76(2):147–158, 2014.

[103] D. R. Merluşcă. Application of the Fenchel theorem to the obstacle problem. In Barbara Kaltenbacher et al., editor, *System Modeling and Optimization*, volume System Modeling and Optimization of *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, pages 179–186. Springer Verlag, to appear, 2014.

[104] C. M. Murea and D. Tiba. A direct algorithm in some free boundary problems. *BCAM Publications*, 2012.

[105] C. M. Murea and D. Tiba. A penalization method for the elliptic bilateral obstacle problem. In Barbara Kaltenbacher et al., editor, *System Modeling and Optimization*, volume System Modeling and Optimization of *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, pages 187–196. Springer Verlag, to appear, 2014.

[106] W. Murray. Analytical expressions for the eigenvalues and eigenvectors of the hessian matrices of barrier and penalty functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7(3):189–196, 1971.

[107] P. Neittaanmaki, J. Sprekels, and D. Tiba. *Optimization of elliptic systems.* Springer, 2006.

[108] J.C.C. Nitsche. Variational problems with inequalities as boundary conditions or How to fashion a cheap hat for giacometti's brother. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 35(2):83–113, 1969.

[109] J. T. Oden and J. N. Reddy. *Variational methods in theoretical mechanics*, volume 1. 1976.

[110] R. Pei. Existence of solutions for a class of biharmonic equations with the Navier boundary value condition. *Boundary Value Problems*, 2012(1), 2012.

[111] P. Peisker. A multilevel algorithm for the biharmonic problem. *Numerische Mathematik*, 46(4):623–634, 1985.

[112] F.A. Pérez, J.M. Cascón, and L. Ferragut. A numerical adaptive algorithm for the obstacle problem. In *Computational Science-ICCS 2004*, pages 130–137. Springer, 2004.

[113] A. Poullikkas, A. Karageorghis, and G. Georgiou. Methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems. *Computational Mechanics*, 21(4-5):416–423, 1998.

[114] M. J. D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In R. Fletcher, editor, *Optimization*, pages 283–298. Academic Press, New York, 1969.

[115] C. Pozzolini and A. Léger. A stability result concerning the obstacle problem for a plate. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 90(6):505–519, 2008.

[116] J. N. Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells.* CRC Press, 2006.

[117] R. T. Rockafellar. Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 33(1):81–89, 03 1966.

[118] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1997.

[119] J.-F. Rodrigues. *Obstacle problems in mathematical physics.* Elsevier, 1987.

[120] C. S. Ryoo. Numerical verification of solutions for obstacle problems using a Newton-like method. *Computers and Mathematics with Applications*, 39(3–4):185 – 194, 2000.

[121] H. Benaroya S. M. Han and T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935 – 988, 1999.

[122] D. G. Schaeffer. A stability theorem for the obstacle problem. *Advances in mathematics*, 17(1):34–47, 1975.

[123] G. Schmidt and B. N. Khoromskij. Boundary integral equations for the biharmonic dirichlet problem on nonsmooth domains. *J. Integral Equations Applications*, 11(2):217–253, 06 1999.

[124] S. S Siddiqi, G. Akram, and K. Arshad. Solution of fourth order obstacle problems using quintic b-splines. *Applied Mathematical Sciences*, 6(94):4651–4662, 2012.

[125] S. Simons and C. Zălinescu. Fenchel duality, Fitzpatrick functions and maximal monotonicity. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 6(1):1–22, 2005.

[126] M. Sofonea and A. Matei. *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, volume 18. Springer, 2009.

[127] J. Sprekels and D. Tiba. A duality approach in the optimization of beams and plates. *SIAM journal on control and optimization*, 37(2):486–501, 1999.

[128] J. Sprekels and D. Tiba. Sur les arches lipschitziennes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 331(2):179–184, 2000.

[129] G. Stampacchia. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Séminaire Jean Leray*, (3):1–77, 1963-1964.

[130] G. Stampacchia. Formes bilineaires coercivitives sur les ensembles convexes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 258:4413–4416, 1964.

[131] G. Stampacchia. Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l'institut Fourier*, 15(1):189–257, 1965.

[132] F. Stenger, Th. Cook, and R. M. Kirby. Sinc solution of biharmonic problems. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 12(3):371–414, 2004.

[133] R. Tremolieres, J.-L. Lions, and R. Glowinski. *Numerical analysis of variational inequalities*. Elsevier, 2011.

[134] G. M. Troianiello. *Elliptic differential equations and obstacle problems*. Springer, 1987.

[135] M. Tsutsumi and T. Yasuda. Penalty method for variational inequalities and its error estimates. *Funkcialaj Ekvacioj Serio Internacia*, 42:281–290, 1999.

[136] B.K. Turmetov and R.R. Ashurov. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball. *Boundary Value Problems*, 2013(1), 2013.

[137] A. Wächter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming*, 106(1):25–57, 2006.

[138] P. Wilmott. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction.* Cambridge University Press, 1995.

[139] M. Wright. The interior-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences. *Bulletin of the American mathematical society*, 42(1):39–56, 2005.

[140] S.J. Wright and J. Nocedal. *Numerical optimization*, volume 2. Springer New York, 1999.

[141] S.-T. Yau and Y. Gao. Obstacle problem for von kármán equations. *Advances in Applied Mathematics*, 13(2):123–141, 1992.

[142] K. Yosida. *Functional Analysis.* Classics in Mathematics. Cambridge University Press, 1995.

[143] C. Zalinescu. *Convex analysis in general vector spaces.* World Scientific, 2002.